ファインマン講義 重力の理論

●ファインマン／モリニーゴ／ワーグナー 著
●ハットフィールド 編
●和田純夫 訳

岩波書店

FEYNMAN LECTURES ON GRAVITATION

by Richard P. Feynman, Fernando B. Morinigo and William G. Wagner

edited by Brian Hatfield with a Foreword by John Preskill and Kip S. Thorne

First published in the United States by Perseus Books Publishing, a Subsidiary of Perseus Books L. L. C.

This Japanese edition published 1999 by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, by arrangement with Perseus Books, Reading, Massachusetts.

序　文

1962年から1963年にかけての1年間，リチャード・ファインマンはカルテク(カリフォルニア工科大学)で，重力についての講義を行なった．場の量子論の方法，特に量子電気力学のファインマン図を使った(最低次の)摂動論については既習のものとして行われた大学院生向けのこの講義では，ファインマンは，従来とは異なるアプローチを取った．2人の助手フェルナンド・B・モリニーゴとウィリアム・G・ワーグナーが，この講義ノートを作成した．このノートはのちタイプされ，そしてそのコピーが長年カルテクの本屋で売られていた．

ノートは出版されなかったが広く頒布され，物理の基礎についてのファインマン独特の洞察のため，それを読んだ多くの人々に大きな影響を与えてきた．モリニーゴとワーグナーがこのファインマンの遺産の保存のために果たした功績は，多大なものである．そして今回，ブライア・ハートフィールドの努力により，この講義はやっと出版され，広範囲の読者と後世の人々に提供されることになった．ハートフィールドは出版のための原稿を作る際，細かな間違いを訂正し記法を改善したが，その他の点ではモリニーゴとワーグナーが作成したノートに従った(短い段落が2カ所削除された*1)．

ファインマンは1年間毎週1回，全部で27回の講義を行なった．講義はカルテクのイーストブリッジ棟の3階，席が2列しかない小さな部屋で行なわれた．出席者は通常，15人以上になることはなかった．(少なくともそのときに出席していた2人の学生ジェームス・バーディーンとジェームズ・ハートルがその後，自分自身でも重力理論に大きく貢献した．) 講義はテープに録音されたが，非常にくだけた講義だったので，モリニーゴとワーグナーは，理解可能なノートにするには，内容をかなり改訂しなければならなかった．概してワーグナーが数学的部分を担当し，モリニーゴが語りの部分を担当した．その結果をファインマンがチェックし，さまざまな修正や追加をし，その後学生に頒布された．ノートにはファインマンの精神が行き渡り，ジョークが散りばめられてはいるが，彼特有の言葉遣いが部分的にしか残されていないのは止むを得まい．

この本には16回分の講義しか含まれていない．これらは27回の講

*1　削除された段落は，8.7節結論部分の，物質場の作用に対する間違った表式(正しい表式は10.2節にある)と，14.3節第3段落の，星の安定性に関するニュートン理論についてのいくつかの間違った説明である．

義のうちの，ほぼ最初の16回分に相当する．モリニーゴとワーグナーは27回すべてのノートを作成したが，その年度末までにファインマンは，最初の11回分しかチェックし修正しなかった．そのとき彼は他のプロジェクトに気を取られていたらしく，ノートを編集する作業に戻ることはなかった．したがって，1962-63年には最初の11回の講義ノートだけが学生に頒布され，その後それだけが複製されカルテクの本屋で販売された．

1971年7月，本屋で販売するためにノートの新しいコピーが作られ，そのときファインマンは，続きの5回の講義を含めることを認めた．新たに加えられた講義には，次の断り書が付けられた．

> この講義ノートに対する関心が強いので，3回目の複製をする．その作成中ファインマン教授は，続きの5回分の講義を含めることに同意した．これらは，1962-63年に出された11回分のノートに付ける予定だったが，ファインマン教授がそれを認めるほどには，十分に編集され修正されなかった．
>
> この部分の講義ノートは，荒削りのままになっている．編集段階での小さな修正を除き，8年前そのままの形を保っている．ファインマン教授はチェックしていない．読者はそのことを頭に入れ，この部分を，ファインマン教授の仕事の正式な解説ではなく，その当時に考えていたことの報告だとみなしていただきたい．

実際，ファインマンが新たな部分を細かにチェックしなかったことは，真実だと思われる．たとえば第14章は(以下で議論するように)間違った説明を含んでいるが，1971年に(あるいは講義の数週間後であっても)チェックをしていたら，容易にその間違いに気づいたはずである．したがって読者は第12章から第16章を読むとき，上記の断り書を頭に入れておくべきであろう．

最後の11回分に対するモリニーゴとワーグナーによるノートの頒布をファインマンが認めたことはなかったので，その分はこの本からも除外される．それらは大部分，量子重力とヤング-ミルズ理論での放射補正に関するものである．彼はその内容に不満だったので，頒布を望まなかったのだと我々は推測する．

ファインマンは重力についてのこのコースと同時に，大学2年生向けに革新的な授業も行なっていたことは，注目すべきことである．『ファインマン物理学』第2巻と第3巻[Feyn 63a]として不滅の名著となった授業である．ファインマンは毎週月曜日，午前中に2年生向けの授業をし，昼食後に重力の講義を行なった．週の後半にはもう1つの2年生向け授業とマリブのヒューズ研究所での科学者向け講義があった．これらの教育義務と自分の研究に加えて，ファインマンはカリフォルニア州教育委員会のために，教科書を審査するパネルにも参加していた．これも消耗な仕事であったが，このことは『ご冗談でしょう，ファインマンさん』[Feyn 85]に生き生きと語られている．重力の講義に参加していた，カルテクの若い助教授であったスティーブ

ン・フラウチは，その年度の終わりにファインマンが，「くたくたになってしまった」と言っていたのを覚えている．

ファインマンのコースは，一般相対論への包括的な入門を目的としたものではなく，そのある部分はかなり古くさいものになっている．第 7 章から第 12 章までの内容の多くは，他の本に，より系統的により詳しく扱われている．ではなぜ現在，この講義を出版すべきなのだろうか．少なくとも，3 つの大きな理由がある．第一に，ファインマン(やその他の人々)によって開発された，伝統的ではない一般相対論の基礎へのアプローチについて，これに匹敵する入門的な説明が他にないことである．第 3 章から第 6 章に提示されているそのアプローチでは，物質のエネルギー運動量テンソルに結合した質量のないスピン 2 の場(重力子)の理論が構築され，その理論を自己無撞着にしようとすると必然的に，アインシュタインの一般相対論に一致することが示される．(このノートが物理学者の中で有名になったのは，この内容のためである．）第二に，このノートは，物理の基礎やその他の話題について，多くの魅力的で啓発的な，興味深い余談や挿話を含んでいる．第三は，このノートの歴史的価値である．ファインマンは講義をしていたころ数年間，重力の基本的問題について深く考えていた．その当時の彼の洞察と見解を記録しておくことは有用である．彼の意見の中には，32 年後も先見の明を感じさせるものがあり，また一方では当然，素朴過ぎたり間違っているものもある．講義をしながら，見解が急速に展開していったものもある．これは特に，相対論的な星を議論した第 14 章について言えるが，そのことについては後でさらに説明しよう．

これらの講義は，重力についてのファインマンの見解を教えてくれるという点で特別の価値があるが，一般相対論の現代的な幾何学的定式化，あるいはこの理論の計算技術や応用を初学者が学ぶための本としては，適切なものではない．そのための本としては，Wald[Wald 84]，Schutz[Schu 85]，あるいは Misner，Thorne and Wheeler [MTW 73]のほうが役立つだろう．ファインマンが好んだ，頑固に非幾何学的観点さえも，Weinberg[Wein 72]によって，より系統的かつ包括的に提示されている．しかし，この問題の基礎に対するファインマン独特の洞察と方法を記しているのは，この本の他にはない．

この講義ノートは，さまざまな立場の人が，さまざまなレベルで読むことができる．

・この講義を完全に理解するには，読者は理論物理の高レベルの教育を受けていなければならない．ファインマンは出席者が，作用からファインマン則を導き，その規則を使ってツリー・ダイアグラムを計算する方法を知っているという程度には，場の量子論の方法になじんでいると仮定していた．しかし，これらの場の理論の方法は，第 2 章から第 4 章，そして第 16 章でのみ大きく扱われている．しかもこれらの章であっても，主要なアイデアはそのような知識なしでも理解で

きる．さらに，他の講義はこれらの章とはかなり独立に読むことができる．

・ファインマンの説明のうまさのおかげで，大学レベルの物理の教育を受けた読者には，これらの講義の大部分が理解可能だろう．技術的箇所のいくつかについては，感覚的な理解で満足しなければならないだろうが．

・しっかりとした物理の教育を受けていないファインマン・ファンにとっても，これらの講義は大きな価値をもつかもしれない．しかしその価値を見つけるには，詳細な洞察や議論が含まれている技術的部分を，かなり飛ばして読む必要があるだろう[*2].

30年以上も前に書かれた重力の本が，少なくともある面では時代遅れになっていることは避けられない．この本も例外ではない．さらにこの講義は，その時点でもファインマン自身が期待したレベルに達しなかったのではなかったのかと思える．彼はこの講義をすることが，量子重力についての自分の研究に整合性のある結論を与えるのに役立つのではないかと期待したが，そうはならなかった．1年の終わり頃，ファインマンが失望し落胆していることは，学生の目にも明らかだった．ファインマン自身の希望に従って，量子重力の問題に焦点を当てた講義(第17章から第27章)はこの本には含めない．

それでも我々は，この本の最初から第16章までに，物理学者，学生，歴史家，そしてファインマンの信奉者にとって価値のある多くのものが含まれていると考える．その上，この講義は楽しい．多くの文章が，偉大な精神が深く困難な問題に独創的な観点から挑戦していく姿を垣間見せる．ファインマンは数年間，重力について深く考えていたが，この問題についてはほとんど論文を書いていない．ここに提供されている，特有の明快さと賢明さで特徴付けられる講義は，すでに発表されている彼の作品群へ加わる，歓迎すべき一章となるだろう．

この序文を書くにあたって，Jim Bardeen，Stanley Deser，Bryce DeWitt，Willy Fowler，Steve Frautschi，Judy Goodstein，Jim Hartle，Icko Iben，Bob Kraichnan，Charles Misner，Fernando Morinigo，Jim Peebles，Allan Sandage そして Bill Wagner から有用な助言を得たことを感謝する．

1995年5月　カルテク

ジョン プレスキル
キップ S. ソーン

---

*2 (訳注)原書では，このあとに講義の要約がつづいているが，かなり専門的な内容になるので，この序文につづく「量子重力」の解説もあわせて，巻末の付録としたことをお断りする．

目　　次

第4章

第5章

第6章

第7章

第16章

第 1 章

1.1 重力への場によるアプローチ

この一連の講義では，重力を，そのすべての観点から議論する．重力の基本法則はニュートンが発見した．重力は質量に比例し，距離については逆二乗則に従う．この法則は後に，相対論的にするためにアインシュタインによって修正された．理論を相対論的にするために必要な変更は，非常に基本的なものだった．粒子の質量は相対論では定数ではない．基本的な問題は，相対論における質量の変化が，重力の法則をどのように変えるかという点にある．

アインシュタインは彼の法則を，1911 年に定式化した．今やこの問題は新しいものではなく，説明すべき物理的結果は，アインシュタイン自身によって見事に説明されている．したがって重力の通常の教程は，彼の法則を説明することから始まる．しかしこの方法は不可避ではない．我々は教育的な理由から，この問題への異なるアプローチを採用する．今日，物理の学生は，アインシュタインの時代には知られていなかった量子論，中間子，そして素粒子について知っている．アインシュタインの時代には，物理は単に重力と電磁気のみから構成されていた．電磁気は，相対論の発明を促した．問題は，電磁気の研究によってもたらされた発見と重力との，つじつまを合わせることであった．

理論物理学における最大の成果だと言われているアインシュタインの重力理論は，重力現象と時空の幾何を結び付ける美しい関係を導いた．これは画期的なアイデアであった．どんな子供でも理解できる，たとえば逆二乗則などの電気力と重力との見掛け上の類似性は，すべての子供たちに，大人になったら，電磁気を幾何学化する方法を発見しようと夢を見させた．そしてある世代の物理学者たちは，重力と電磁気を一つのものに統一しようという，いわゆる統一場の理論を作ろうと努力をした．統一場の理論はどれも，成功しなかった．この講義ではこれらの理論については議論しない．大部分は，物理の知識はほとんどない数学指向の人々によって発明された数学的なゲームであり，理解不可能である．アインシュタイン自身もこの問題を研究し，彼の結果は少なくとも筋は通っているが，しかし，重力と電磁気を結び付ける統一場の理論で成功したものはない．

■ この事情は 1999 年時点でも変わっていない．（■ は訳注を示す．）

成功したものがあったとしても，短命だっただろう．現在我々は，

物理の中には電磁気と重力以外にたくさんの力があることを知っている．中間子やニュートリノや，その他 30 以上もある多くの粒子の統一についても悩まなければならない．この世の中には電気と重力の他にもたくさんのものがあるので，電磁気と重力だけを統一しても偉大な成果とはならないだろう．

我々の教育的アプローチは，場という考え方に慣れた素粒子物理学者に適している．彼らにとって，すべてが一つの大方程式に含まれている数十個の場から，宇宙が構成されていると考えるのは難しいことではない．そう考えれば，重力現象は，それまで考えられていなかったそのような場を一つ増すだけのことに過ぎないことになる．重力の説明とは，全体の中の数パーセントを説明することに対応するのだ．

我々のアプローチをフィクションの世界で説明してみよう．たとえば金星のような宇宙のある小さな領域で，科学者は，我々が核子や中間子などについて知っているように，宇宙の他の数十個の場についてすべてを知っているが，重力については無知であったとしよう．そして突然，驚くべき新実験が行なわれ，2 個の巨大な電気的に中性な物体は，非常に非常に微弱な力で引き付け合っていることがわかったとしよう．金星人は，この驚くべき新事実を説明するために何をするだろうか．おそらく彼らは，すでになじみ深い場の理論を使ってこれを解釈しようとするだろう．

1.2　重力現象の特徴

話を進める前に，この驚くべき新現象に対する理論を構築する際に金星の理論家が考えるべき実験事実について，復習しておこう．

第一に，この引力は逆二乗則に従うという事実がある．我々にとってこのことは，惑星の軌道の研究から，非常に正確にわかっている．また，この力は物体の質量に比例することもわかっている．これは，すべての物体が同じ加速度で落ちることを発見したガリレオにはわかっていた．このことは，どれだけ正確だろうか．原理的には，すべきことははっきりしている．我々はまず，質量を物体の慣性として定義する．物体に力を及ぼし，そのときの加速度を測定すれば慣性は測定できる．次に，たとえば重さを測ることによって，重力による引力を測定する．そして結果を比較する．力と加速度を測定するこれらの実験を十分な精度で行なうのは，極めて難しい．しかしこのことを，10^8 分の 1 の精度で調べられる，エトヴェシュという人が最初に行なった別の方法がある．地球の重力を，地球の回転による遠心力と比較するのだ．後者は純粋に慣性の効果である．緯度が 0 度でも 90 度でもない場所で紐からぶら下げたおもりは，地球の中心を向かない．実際には，地球の凸凹も地球の中心は向かない原因となるが，これらすべてのことは比較のときに考慮に入れることができる．いずれにしろ中間の緯度では，図 1.1 のようにおもりは重力と遠心力を合成した

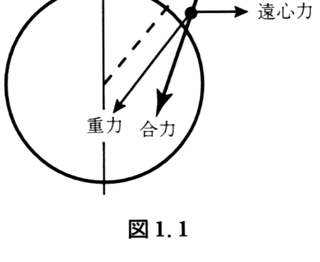


図 1.1

方向を向く．もしおもりを，慣性質量と重力質量の比が違う物質で作ったとすれば，それはややずれた方向を向くだろう．そこでたとえば最初のおもりは銅で作り，2番目のおもりは水素で作ったとしよう．純粋の水素で作るのは難しいかもしれないが，ポリエチレンでもよいだろう．すると，物質によって，慣性質量と重力質量の比が変わらないかどうか，調べることができる．

実際の実験は，このような小さい角度の差を測定するのではなく，トルクを測る．微小なトルクでも，非常に細くできしかも大きなおもりをつるすことができるという水晶繊維の特別の性質を使って，測定可能である．実際には，同じ重さの2つの物質を棒の両端にぶらさげ，その棒を中心でつるして東西方向に向ける．もし，重力に直角な力の成分がゼロでなければ棒にトルクが生じ，それを測定することができる．ディッケによる最近の実験の結果によれば，トルクは生じなかった．慣性質量と重力質量の比は，酸素から鉛まで，多くの物質に対して 10^8 分の1の精度で一定であるというのが，彼の実験の結論である．

同様の実験が，太陽による重力と，太陽を回る地球の軌道に関係する慣性力を比較することによってできるかもしれない．地球上のすべての物は空間を，軌道に沿ってすごい速度で動いている．その動きを我々が気づかないのは，周囲のすべてのものがその軌道に乗っているからである．もし重力がそれぞれの物体に対して同じではなかったら，それぞれが異なる軌道に沿って動こうとするので，そのずれの効果が現われるだろう．その結果はたとえば，太陽方向を向く小さな力になるかもしれない．そのような効果として，周期が1日の振動の検出が試みられた．たとえば，ねじれ秤に載せた一対のおもりの朝と夕方の振る舞いが比較された．当然，違いは測定された．建物の両側の温度が異なっていたこともその原因となった．このような，非常に小さな効果を見つけるための実験の難しさは，実際に求めているものを測定したのか，何か別のものを測定したのか，その区別をつけることが難しいことである．しかし，実験結果に基づく結論は，すべての物体がその軌道上で，少なくとも 10^8 分の1の精度で，地球自体と同程度にバランスしているということであった．この 10^8 分の1という精度から，多くの重要なことがわかる．たとえば原子核の束縛エネルギーは，通常，核子1つ当たり約6 MeVであり，一方，核子自体の質量は940 MeV程度である．つまり束縛エネルギーは全エネルギーの約1パーセントになる．したがって，10^8 分の1という精度は，束縛エネルギーの慣性質量と重力質量の比は，少なくとも 10^6 分の1という精度で一定であることがわかる．核子の質量の 10^8 分の1は約9 eVなので，低エネルギー状態にある電子の電気的束縛エネルギーにおける比にも制限がつく．近い将来に期待できることだが，もし実験の精度が 10^{10} 分の1にまで向上すれば，2 V程度である化学的束縛エネルギーに対しても，5パーセントの精度で質量の比のチェックができる．

■現在ではこの精度は，10^{12} 分の1にまでなっている．

このような精度になると，反物質の重力的振る舞いについてもチェ

ックができる．逆二乗則という電気力と重力の顕著な類似性から，反物質と物質は反発するのではないかと考える人々がいる．電気力では同じ電荷は反発し，逆の電荷は引き付け合う．したがって重力はその反対で，同種のものは引き付け合い，異種のものは反発すると考えたくなると主張するのである．重力で異種のものと言えば，反物質ということになるだろう．しかし，10^8 分の 1 という精度があれば，鉛の K 殻電子の電気的束縛エネルギーの，粒子対つまり反物質が絡む真空分極による補正の，重力に対する振る舞いをチェックすることができる．つまり，物質と反物質の重力に対する振る舞いが異なると考えなければならない証拠はまったく存在しないと言うことができるだろう．実験的な，そして理論的なすべての証拠は，重力に関係するのはエネルギーであることを示している．そして物質も反物質もエネルギーはプラスなので，重力は両者を区別しない．

さらに，重力場の中で光が，我々の理論の予言通りに「落下」するという事実も，この結論の証拠になる．後で計算するが，その結果によれば，たとえば太陽の横を通り過ぎるとき光は曲がり，しかもその大きさは測定可能である．ところが光子はそれ自体の反粒子であり，この場合，粒子も反粒子も重力に対する振る舞いは同じであると考えなければならない．電子から放出される光子と，陽電子から放出される光子とは違うという理論の構築は，ある人々にとっては興味深いことかもしれない．しかしそのような理論が必要となる現象はまったく存在しないので，そのような試みにはほとんど意味がない．そのような理論が成り立つとすれば，それによって現在知られているすべての事実を説明しなければならない．しかも，おそらくは何らかの新しい電気力学的効果を予言することになるだろうが，そのような効果がないことを示す実験によって，すぐにそれは否定されることになる．

物質と反物質が重力に対して同じように振る舞うという主張の最も直接的な証拠は，M. I. T.（マサチューセッツ工科大学）で行なわれた K_0 と $\overline{K}_0$ の崩壊に関する実験である．実験自体には問題があったが，その結果は，物質と反物質を重力的に区別する理論を否定するために利用することができる．以下の議論は，M. グッドによるものである [Good 61].

■ K_0 とは，電気的に中性な K 中間子のことで，$\overline{K}_0$ はその反粒子である．

K_0 と $\overline{K}_0$ が重力の影響を受けることは前提とする．これらは互いに相手の反粒子である．重力によって一方が引き付けられ，他方が反発されるとしたらどうなるかを考えてみよう．これらの粒子には 2 種類の崩壊モードがあり，それは，

$$K_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(K_0+\overline{K}_0),\quad K_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(K_0-\overline{K}_0)$$

という形で表わされる．これらの 2 つのモードの振幅は干渉する．実験ではこの干渉を測定し，質量差 Δm は $\Delta m<10^{-10}m_K$ であるとした．実験は地球の重力場中で行なわれたことを考えると，この値は，物質は引き付けられ，反物質は反発されるという考え方と矛盾している．

重力ポテンシャルをϕとすると，質量は片方は$m\phi$， もう一方は$-m\phi$だけ変化する．予想されるこの質量差は，M.I.T.での実験による上限よりも大きい．地球の重力ポテンシャルではなく，さらに大きな太陽，あるいは銀河のポテンシャルを考えれば，重力の等しさに対してさらに厳しい制限が得られるだろう．もし反物質反発説に執着する人が，K_0や$\overline{K_0}$は重力の影響を受けないと主張すれば，以上の議論は成り立たなくなる．しかしその場合には，新しい特殊な仮定が必要となるだろう．一つの実験だけだったら，何か特別の理由を考えだすことによって，常にその結果を説明できるものである．

単独の自由中性子が重力場の中で落下することも知られている．中性子干渉計を設計するときに考慮しなければならないので，このことはかなりの精度でわかっている．低速中性子を集めて細いビームにし，百メートル程度離れた位置で観測すると，他の観測できる粒子とまったく同様に地球の重力場中で落下している．まとめると，重力について驚くべき第一の事実は，調べられたいかなるケースでも，慣性質量と重力質量の比が一定だったということである．

重力について驚くべき第二のことは，その弱さである．金星人がβ崩壊を「弱い」相互作用と呼んでいたとしたら，重力の発見にはかなり当惑しただろう．我々の生活の中で重力が重要な役割を果たしているのは明らかである．地球の重力は，足の筋肉の力と比べて弱くない．しかしここで言っているのは，粒子間の力として考えたとき，重力は他の力と比べて非常に弱いということである．この比較は，人間の力などとの比較よりも「普遍性」があるだろう．たとえば，2つの電子間の，電気力と重力の比を計算してみよう．結果は

$$F_{\text{電気}}/F_{\text{重力}} = 4.17\times 10^{42}$$

となる．重力はこれほど弱い．力の比での比較は，結合定数を使った普通の表現よりも意味がある．しばしば，$e^2/\hbar c$という数が小さい$(=1/137)$ので，電磁気力は弱いという．しかし$1/137$という数は重要ではない．ある人は，意味のある数字は有理化された電子の電荷だというかもしれない．それは$\sqrt{(4\pi e^2/\hbar c)}=0.31$となる．これは$1/137$とはかなり異なるが，物理的内容は同じである．弱い相互作用(β崩壊)は，その結合定数$GM_p^2=10^{-5}$が小さいので弱いというとしたら，なぜこの量を無次元にするために，陽子の質量を使うのかと尋ねる人もいるだろう．もし弱い相互作用が何らかの中間子によって媒介されているのなら，その中間子の質量を使うほうが自然だろう．それは陽子よりもはるかに重いので，10^{-5}という「小さな」値とはかなり違ってくる．

重力は，我々が知っている他の場と比べてあまりにも弱いので，他のすべての場を統一する理論での何らかの補正項，今まで無視してきた項として説明するのは，おそらくできないだろうと思える．10^{42}という数は素晴らしく大きいので，他にもこのような大きな数がないかと，探したくなる．これはエディントンが最初に考えたアイデアであ

る[Eddi 31, 36, 46]．このような大きな数が登場するというのは，それが1つだけだったとしても充分に不思議であり，2つもあればさらに問題は大きい．もしそれらが関連しており，一方が大きければ他方も大きいことがわかれば，少しは安心できる．Eddington は $10^{42}=2^{137}$ という関係を提案したが，彼の本には理解しがたい，有用な考えが書かれているとは思えない部分もある．10^{42} の説明を別の方向に求めてみよう．大きな数は，他にもある．たとえば，我々の中の原子や粒子の数も大きいが，比較するときは人間的要素は避けたい．重力は，銀河など大きな物体の動きに関わっているので，重力の強さと宇宙の大きさとの関連を探すのがよいかもしれない．

宇宙は非常に大きく，その境界はよくわかっていない．しかし何らかの半径が定義できるかもしれない．遠方の銀河からの光が，それらが地球からの距離に比例する速度で後退しているかのように，低周波方向にずれるというのは観測上の事実である．これは，いわゆる膨張宇宙論によって説明することができる．宇宙モデルを考えるときには重力理論が非常に重要であり，そのことはこの講義の後で議論する．しかしここでは，銀河は，大爆発が起きたある位置から発した物質からできていると仮定しよう．速く飛び出した物質は遠くに到達しているだろうから，中心からの速度と距離が比例していることは，自然な結果である．比例関係は $R/V=T$ と書け，T は仮想上の爆発からの時間を表わす．この時間(この時間の逆数が，ハッブル定数と呼ばれる)は，13×10^{10} 年程度である．この値の誤差はかなり大きく，数年前までは 2×10^{10} 年と言われていた．誤差は距離の測定からくる．ドップラー・シフトのほうは，遠方の銀河までの距離よりもずっと容易に測定できる．

この定数は宇宙の年令を表わしている．宇宙が本当に T 年前に始まったと考えなければならないというわけではないが，e^2/mc^2 という量が「電子半径」を表わすように，宇宙の基本的次元を表わす．同様に Tc は，宇宙の「半径」とでも言えるような長さを表わす．ではハッブル定数から，10^{42} のオーダーの量を導けるだろうか．たとえば，光が電子のコンプトン波長分 $\hbar/mc^2$，あるいは陽子のコンプトン波長分 $\hbar/M_pc^2$ の距離を動く時間と，ハッブル定数とを比較してみよう．この時間は，人間にとってのスケールである秒よりも意味があるだろう．これらの時間は $\hbar/mc^2=10^{-21}$ 秒あるいは $\hbar/M_pc^2=10^{-24}$ 秒であり，一方 T は，$T=10^{17}$ 秒なので，比は陽子の場合は 10^{41} 程度になる．この値は，ここの話が数占いのような議論であることを考えれば，陽子の場合の電気力と重力の比 10^{36} とは大きくは違わない．電子の場合は比は 10^{38} となり，これも 10^{42} に非常に近いとは言えないが，ここでしていることは，単に，何か現実的なアイデアを得られるかどうか，大雑把な検討をつけているだけであることを忘れてはいけない．実際ディラック[Dira 37, 38]は，重力定数が正確にこの数字になるような重力理論を作ろうとした．困難の1つは，コンプトン波長を基準

にすれば宇宙は常に歳をとり続けているので，重力の強さに時間依存性を与えなければならなかったことである．しかし，他のすべてのものが「不変」であるときに，重力の時間依存性ということの意味を定義するのは非常に難しい．意味のある数は無次元となる比なので，同じ状況を電荷に時間依存性があると表現できるかもしれず，理論が確定しない．このような問題はとりあえず無視し，直観的に重力定数の時間依存性の結果を考えてみよう．ある人は，これが地震の原因だと言う．重力が弱くなるにつれて地球がゆっくりと膨張するので，割れ目などができるからである．しかし，地球内部でマグマが流れているという理論のほうが，なぜ特定の地域に頻繁に地震が起きるのかをうまく説明する．だから，地震の理論からは，なぐさみは得られない．

G が変化するという説を，星の理論における結果から否定しようとする人もいるかもしれない．ここでは星のことを詳しくは議論しないが，その概要は次の通りである．つまり，まず星を構成する物質が凝縮し重力エネルギーを得て高熱になると，原子核反応が起こり始める．すると圧力が生じて星を平衡状態に保つ．放射によって失われるエネルギーは原子核反応によって供給されるので，凝縮は進まない．もし重力定数に時間依存性があり，以前はもっと大きかったと仮定すると，より大きな重量を支えるために，エネルギー生成率は以前のほうが大きかったと考えなければならない．詳しい考察によると，星の明るさは，重力定数のほぼ6乗に比例する．定性的には，もし重力定数が大きかったら，物質の重さを支えるために星の中央の温度はより高くなければならないので，原子核反応はより速く進むということである．では，このことは太陽や，その影響による地球の表面温度にどのような効果をもたらすだろうか．10^9 年ほど以前から地球には生命が存在したという事実から，地球の表面温度についての証拠が見つかることを示そう．もし重力定数が過去，大きかったとすれば，太陽は G^6 則に従って明るくなり，地球は現在よりも太陽に近かったことになる．地球に入射する光の強度は，G^8 に比例する．それに基づき，地球の温度を評価しよう．実際の計算は，雲の存在などさまざまな複雑な要因によって難しくなるが，地球を黒体と近似することによって推定する．回転しているので，黒体はその表面全体から T^4 に比例したエネルギーを放射し，太陽からの入射エネルギーとバランスして平衡温度に達する．測定された惑星表面の温度と比較すると，すべての場合に答は見事に一致するので，この計算方法を数十億年前の地球の表面温度の推定に使うことができる．入射エネルギーは T^4 に比例し，また G^8 に比例する．したがって地球の温度は G^2 に比例し，数十億年前は地球の温度は今より約16パーセント，48°C ほど高かったことになる．

75°C 程度の温度だったら地球の表面がどうなっていたかは，地球物理学者あるいは生化学者が教えてくれるかもしれない．海が沸騰するほどは熱くはないので，この理論を完全に捨て去ることはできないだろう．生命はこのような水温のときに始まった可能性もある．地球

上には，イエローストーンの温泉など，このような水温でバクテリアが生きている場所がある．生存できたのは特異な生命のはずだが，地球上で発見された最古の化石は，高温の証拠となるような特異性を示してはいない．しかし私が知る限り，地球の初期は高温状態であったことを決定的に否定する証拠があるとは言えない．

過去に重力定数が大きかったら，星の明るさが増し，ある種の星の進化の時間スケールが変わるかもしれない．このことが観測と矛盾するかどうか検討している天文学者がいるが，明確な結論に達したかどうかは，私は知らない．

宇宙の大きさと重力定数との間のもう一つの見事な一致が，全エネルギーを考えることによって得られる．宇宙のすべての粒子の全重力エネルギーは，ハッブル時間を T とし $R=Tc$ とすると，GMM/R 程度になる．もし宇宙が密度一様の球だったら 3/5 という因子が掛かるが，宇宙のモデルはそれほどよくわかっていないので，それは無視する．この数字と，宇宙の全静止エネルギー Mc^2 を数値的に比較すると，$GM^2/R=Mc^2$ という関係が示唆され，宇宙の全エネルギーはゼロだという驚くべき結果が得られる．実際には，この等式が正しいと主張するほど，宇宙の密度も半径もわかっていない．しかし，この 2 つの量が同じオーダーだというのは，まことに驚くべき一致である．宇宙の中心に粒子を新たに作ったとしても，そこには Mc^2 に等しいマイナスの重力エネルギーがあるので，結局エネルギーは何も必要がないことになるというのだ．

この関係において最も決めるのが困難な量は，宇宙の密度である．確かに我々は星や銀河を見ることができるが，燃え尽きた輝いていない星がどれだけあるのかはわからない．銀河間ガスの密度も知らない．遠方の星の吸収スペクトラムの D 線を見ることによって，銀河間にあるナトリウムの密度については推定できる．しかしナトリウムはごくわずかな部分でしかなく，水素密度について知る必要がある．渦状銀河の腕や球状星団の動きを調べると，銀河には，光っていない質量が多量にあるように見える．これらの情報はすべて断片的なので，信頼できる宇宙の平均密度の推定ができない．エディントンは 1920 年代に，銀河内では密度は 1 cm^3 当たり水素原子 1 つと推定した．最近，銀河を「水素の光」で調べた電波天文学者は，やや小さな 0.7 という値に到達した．銀河間物質の密度については測定がされていない．宇宙物理学者は，銀河内よりも 10^5 倍ほど小さく，1 m^3 当たり水素原子 10 個と推測する．この値を使うと，宇宙の全エネルギーはゼロだという，興味深い結果が得られる．なぜそうなのかは大きな謎であり，物理における重大な疑問の 1 つであろう．そして，謎の解明が最も大切なことではないとしたら，物理の研究に何の意味があるだろうか．

宇宙の大きさ，粒子の数，そして重力の関係についてのこれらの推論はすべて，これまで多くの人によってなされてきたことである．推論には一般的に言って，2 つのタイプがある．数学的な宇宙モデルを

構築しようとする非常に真剣な研究者，そして，いつかはその意味がわかるかもしれないとの思いで数値的な不可思議さを指摘する，冗談半分のタイプである．

1.3　重力の量子効果

次の数章では，重力の量子論の構築を始める．そのような理論に観測可能な結果があるのか，考えておいたほうがよいかもしれない．まず，重力を水素原子に対する摂動としてとらえてみよう．明らかに，電子と陽子間の余分の引力のため，水素原子の束縛エネルギーに小さな変化が生じるだろう．摂動論でこのエネルギーの変化を計算し，ϵ という結果を得たとする．時間に依存する水素原子の波動関数は $\exp(-iEt)$ に比例し，E は，毎秒 10^{16} 回ほどの振動数に相当するが，ϵ による補正効果を観測するには，真の波動関数が摂動前の波動関数と比較して，位相が 2π 程度ずれるほど時間が経過するまで待たなければならない．しかし ϵ の大きさは非常に小さいので，宇宙の年令の 100 倍の時間が経過しても，位相差は角度にして 43 秒にしかならない．つまり，重力の効果は原子では観測不可能である．

別の可能性として，重力のみによって結合している原子を考えてみよう．たとえば，2 つの中性子の束縛状態を考える．そのような原子のボーア半径は 10^8 光年，そして束縛エネルギーは 10^{-70} Rydbergs になる．量子力学で計算可能なほど簡単なシステムで，重力の効果を観測できる望みはまずない．

重力の量子論の一つの結論は，この力が，通常，重力子と呼ばれる仮想粒子の交換によって媒介されることである．したがって，光子が観測できるように，ある状況では重力子が観測されるだろうと期待するかもしれない．しかし，光は人類の歴史のごく始めから観測されていたが(アダムも光を見た)，電磁波が，その場としての性質を意識した上で生成されたのは 1898 年のことであり，また，その波の量子的側面が観測されたのは，さらに後のことであった．我々は，地球に引き付けられるという意味で重力を観測しているが，古典力学的な重力波はまだ観測されていない．これは予測に反することではない．重力は非常に弱いので，今日我々が行なうことのできる実験はいずれも，高速で回転している連星系など，考えられる最強の発生源から生じると期待される重力波でさえ，観測できるほど敏感なものではない．そして重力波の量子効果の観測可能性は，さらに百万倍も小さいだろう．重力子を観測できる望みは，まったくなさそうである．

1.4　マクロな物体を量子化する際の哲学的問題について

量子重力の効果がきわめて弱いということは，哲学的問題を引き起こす．自然はここで我々に何かを教えようとしているのかもしれない．

重力は量子化すべきものではないのかもしれない．すべてのものが量子化されるという自然の一様性にこだわらないことは可能なのだろうか．他のすべてのものは量子化されるが重力はされないということは可能だろうか．世界が半分量子的で半分古典的になることはありえないという主張が，以前あった．量子力学的振る舞いを特徴付ける基本原理は，それぞれのプロセスに振幅が存在することである．そして電子など，振幅によって表現される粒子が，振幅ではなく確率によって表わされる相互作用をもつことはありえない．2 スリットの干渉実験を考え，図 1.2 に描かれているように，原理的には電子がどちらのスリットを通過したか識別できる，古典的だと仮定された重力検知器を置く．検知器がまだ，電子がどちらを通ったか伝える信号を受け取っていないとする．電子の位置は振幅によって表わされる．その半分は上のスリットを，残りの半分は下のスリットを通っている．重力が場によって相互作用するならば，重力場も振幅をもっていなければならない．その各半分は，いずれかのスリットを通った電子の重力場に相当する．しかしこれはまさに，量子場の特徴である．確率ではなく振幅によって記述しなければならない．つまり，場の量子的性質を壊すことは不可能に思える．

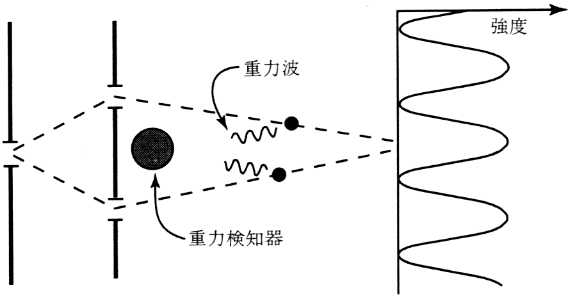


図 1.2

このような議論はあるが，偏見はもたないでおきたい．量子論が，重力は量子化されねばならないと絶対的には保証してはいないかもしれない．偏見がないということは，無知でいるという意味ではない．直観的には正当化されそうもない理論を使って，もしそれが正しかったらどうなるかを計算してみると，突然，真実が明らかになるということもあるかもしれない．「もちろん，常に疑いの目はもっていなければならない」という態度では，このような発見は決してできないだろう．そうではなく，一つの偏見のみに基づいて行動し計算するのである．この意味で，私は，量子力学は長距離や大きな物体では破綻する可能性はあると言っておきたい．量子力学は長距離で破綻すると思うと言っているのではない．破綻しても，我々の知識とは矛盾しないと言っているだけである．量子力学の破綻がもし重力と関係しているとしたら，この破綻は $GM^2/\hbar c=1$，つまり M が 10^{-5} グラム程度で出現すると予想される．これは，粒子数にすれば 10^{18} 程度である．

量子力学は，このレベルの物体に対しては意味のない答を与える．たとえば，土の粒が壁を通り抜ける確率を計算すると，$10^{-260,000}$ といった途方もない結果が得られる．したがって，量子力学が大きなスケールでは，つまり通常の大きさをもつ物体に対しては誤りだという可能性も無視することはできない．これに関係した話として，観測と測定の理論が生み出す問題を考えてみよう．たとえば，シュレーディンガーの猫のパラドックスを取り上げる．これは，正当な論理によっても異なる2つの回答が得られるという意味での，真のパラドックスではない．これは量子力学の哲学的困難を指摘する手段であり，各物理学者は，どちらの立場を選ぶか決めなければならない．

中を見ることのできない閉じた箱に，生きた猫と，弾を込めたショットガンを入れる．ショットガンの弾が発射されたら猫は必ず死ぬようになっている．ショットガンの引き金は，放射源からの粒子を計測するガイガー計数管につながっている．粒子は1時間に1回の確率で計測されとしよう．すると，箱を閉めてから1時間後に，この猫が生きている確率はどうなるだろうか．

量子力学による答は，簡単である．最終状態には 2つの可能性があり，その振幅は

$$\text{振幅} = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\text{生きた猫}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\text{死んだ猫})$$

となる．しかし，猫は物事をこのようには見ないだろうと思える．自分が $1/\sqrt{2}$ は生きており，$1/\sqrt{2}$ が死んでいるとは感じないだろう．どちらか一方のはずである．つまり，外部の観察者には振幅によって適切に表わされる状況が，観測者がその振幅の一部である場合には，必ずしもうまく表わされていない．通常の量子力学では外部観測者は，特別の位置を占めている．猫の生死を見極めるためには，箱に穴を開けて中を見る．そのような測定をした後でのみ，このシステムは決まった最終状態になる．しかし内部観測者の観点からは，外部観測者によるこの測定の結果は，振幅ではなく確率で決まる．つまり量子力学の通常の説明では，外部観測者が絡む説明と，観測なしでの説明では，根源的な相違があることがわかる．

このタイプのパラドックスは，宇宙全体への影響を認識するために原子的事象の増幅を考えると，必ず生じる．シュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \boldsymbol{H}\Psi$$

に従う，完全な(すべての観測者を含む)モンスター波動関数による全世界の量子力学の伝統的な説明は，きわめて複雑な無限個の振幅を含む．もし私がラスベガスでギャンブルをし，ルーレットで 21 に金を賭けようとしたとき，隣の女性が知っている人を見かけて私にミルクをこぼしたので，私は賭けるのを止め，そして 21 が出たとしよう．私にとって宇宙のすべてが，小さな光子が彼女の網膜の神経の末端に

■現在は，宇宙波動関数と呼ばれる．

あたったという事実によって決まったことがわかる．宇宙全体が，原子的事象ごとに枝分かれする．量子力学すべてを文字通りに取ろうと主張する人は，このような描像で満足する．宇宙全体を描写する波動関数にとっては外部観測者は存在しないので，世界の適切な描写は，原子的事象ごとに枝分かれするすべての振幅を含むと，彼らは主張する．しかし，そのような宇宙の一部である我々は，自分にとって世界がどの方向に枝分かれしたのかわかっており，過去の軌跡をたどることができる．したがって，我々に提起された哲学的問題は，我々の過去の軌跡を観測したときその観測結果は，外部観測者が観測をしたことによって最終状態が決定されるのと同じ意味で，実在のものになるかということである．これは，非常に悩ましい話となる．我々が周囲の世界を見るとき，一貫して自分を外部観測者とみなすことができるが，周囲の世界も同時に我々を観測しており，互いに見ていることについて意見を突き合わせることもある．では私の観測は，何か起こるのを見ている観測者を観測したときにのみ実在になるということを意味するのだろうか．これは困った観点である．観測者なしでは実在がないという考え方を，あなたは真面目に受け入れるだろうか．どの観測者なのか．蠅は観測者なのか．星はどうだろうか．生命が誕生した紀元前 10^9 年以前には，宇宙には実在はなかったのか．あるいは，あなたは観測者なのか．そうだとしたら，あなたが死んだ後には世界には実在はないのだろうか．私は，生命保険に加入した尊敬すべき物理学者をたくさん知っている．どのような哲学によれば，人間のいない宇宙を理解することができるだろうか．

■ これらのことは，量子論の観測問題，あるいは解釈問題と呼ばれる．

つじつまを合わせるには，充分に複雑なプロセスに対しては振幅は確率になるという可能性を，考えておかなければならない．加えられるのは振幅であるという事実は，位相差を感じるプロセス，つまり干渉においてのみ確認できる．非常に複雑な物体における位相の関係はとてつもなく複雑であり，複雑な物体のすべての部分の位相が，非常に精密な形で変化する場合にのみ，干渉を観測することができる．位相の変化が少しでも乱されるメカニズムがあれば，位相は完全には精密ではなくなり，非常に複雑な物体に対しては振幅は確率になる．しかし，位相を乱すメカニズムがあるとすれば，それに付随した結果があるかもしれない．そして，もしその結果の一つが重力自体の存在だったとしたら，重力の量子論というものはなくなる．もしそうだとすれば，この講義にとってはひどい話だが．

これらの話は非常に粗っぽい推定であり，これ以上議論を進めても意味はないだろう．いずれにせよ我々は常に，量子力学は破綻するかもしれないという可能性を頭に入れておくべきである．測定と観測についての我々の哲学的先入観には，問題があるからである．

1.5　他の場の結果としての重力

あの金星人もするであろう，重力理論の構築に戻ろう．一般的に言って，この新しい現象に対処するには，2つの方向がありうる．それは，

1. 重力は新しい場である．
2. 重力は，すでに知っているが，正しく計算していなかった何かの結果である．

しばらく，第二の方向に可能性があるかどうか，検討してみよう．普遍的な引力という事実は，分子物理の状況を思い出させる．すべての分子は，長距離では $1/r^6$ のように振る舞う力によって引き付け合う．これは，分子中の電荷分布の揺らぎによって誘導される双極子モーメントによって理解できる．これが普遍的だということは，すべての物質は充分に冷やすと凝縮するという事実から理解できる．重力も同様に，何かはわからないが，電荷か何かの揺らぎによる引力であるという可能性もある．

すべての状態の和を考えるとき頻繁に無限大が出現するので量子力学は破綻すると悩む人は，重力，宇宙の大きさ，そして量子力学のこの破綻の間の関連を探るだろう．無限大は，$\sum_n 1/(E-E_n)$ という和をとるときに常に現われる．もし宇宙全体を考えるなら，普通やるように仮想状態全体の和ではなく，宇宙からエネルギーを借りて実現できる状態だけの和をとるということもありえる．エネルギー保存則の破れが宇宙全体のエネルギーよりも大きくなるような仮想状態を許さないという理論は，実質的にこのエネルギーを無限大とする通常の理論とは，やや異なるだろう．しかし，通常の理論とは異なるとしても，その結果として重力のようなものが現われるとは，私には考えられない．

重力はニュートリノなど，すでに知られている仮想粒子の交換から生じないだろうかと考える人もいるだろう．ニュートリノは，一応，正しい性質をもつ．中性であり，質量はなくその相互作用は $1/r$ のように振る舞い，その相互作用は非常に弱い．

次章では，この重力ニュートリノ理論を検討し，なぜそれが失敗するのかを見る．その後で，新しい場としての重力理論の構築を始めることにする．

第2章

2.1　統計力学の公理

重力理論を構築する際には，現在の科学的思考の中に余りにも多くの偏見があることに注意を払わなければならない．前回の講義では，宇宙の解釈において確率が果たす役割には，満足できない点があることを見た．宇宙が，外部観測者をもたない大波動関数によって表わされると本当に考えるとするならば，観測というものなどないのだから，確率が登場することもありえない．宇宙の各部分は，測定結果の確率振幅としての波動関数によって非常に正確に表わされるという実験的証拠があるにもかかわらず，このことは多くの物理学者によって主張されている．

■多世界解釈という考え方により，この主張が具体化されている．

同様に，統計力学の通常の簡単な教科書的説明にも問題がある．このことは，重力理論に密接に関係しているわけではないが，後で議論する宇宙論的問題には関係している．しばしば，すべての状態は先験的に，等しい実現可能性をもつものだと仮定される．これは現実の世界では正しくない．この世界は，この仮定を前提とする物理によっては，正しく表わされない．物理学者というよりも地質学者，天文学者，生物学者といった人々だが，宇宙のまだ観測されていない領域を見れば，我々が信じている物理学では予言できない，何らかの組織体が見つかる可能性が大きいと考える人がいる．観測者としての我々の経験では，たとえば表紙に「ナポレオン」と書いてある本を見れば，中にはナポレオンについて何かが書かれている確率が非常に高い．ページを開けると熱力学的に平衡なシステムが見つかるとは考えない．しかし物理学者は，かかる確率を宇宙の未知の領域の問題に取り入れる方法を知らない．物理学者にしろ地質学者にしろ，岩の中を見たときに化石が見つかる確率を予言できない．

同様に天文学者は，宇宙のいたる所に，内部が熱く外部が冷たいという，熱力学的平衡とは非常に異なったシステムが見られることを知っている．

通常の熱力学的偏見の立場からは，このような状況が起こる可能性がいかに少ないか，簡単な乱雑さの問題を考えることによって理解することができる．まず宇宙として，白と黒の二種類の粒子が入っている一つの箱を考える．その宇宙のある領域，たとえばその箱のある片隅で，対角線に沿って白の粒子と黒の粒子が分離しているとしよう

(図 2. 1). 我々の現在の偏見では，この状態を非常に可能性の小さい統計的揺らぎとみなすので，このようなことが起きる先験的確率は極めて小さい．宇宙の他の部分に対しては，どのような予測ができるだろうか．たとえばすぐ隣の領域を見ると，その部分の黒と白の粒子の分布はもっと乱雑だろうと予測される．しかし現実には，そうはなっていない．すべての領域が，同じような秩序をもっている．車に乗って，今まで見たことのない山にドライブに行っても，よく見たことのある木が見つかるだろう．膨大な数の粒子が絡んだ現象なので，通常の統計力学的見方では，このようなことが起こる確率は極端に小さい．

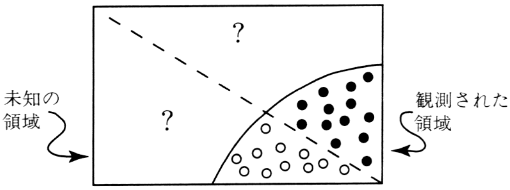


図 2. 1

我々が観測する揺らぎの最良の説明は，その部分だけが揺らいでおり，他の部分は乱雑だというものである．すべての状態が先験的に同確率であるならば，そして世界のある部分が特殊な状態だとすれば，残りの部分は一様に混合しており，揺らぎは少ないはずである．世界の事象や構造は相互に関連している，すべては同じ過去をもっているのだからと反論する人がいるかもしれない．しかしこれは，宇宙の統計力学的説明の基礎となる理論とは異なる理論である．つまり過去の宇宙は現在よりも秩序だっており，最も可能性のある状態は平衡状態ではなく，力学的に進化している特別の状態であるという，逆の主張となる．これは，すべての歴史学者，古生物学者，その他の人々が採用する，常識的な仮定でもある．

確率の議論を理論のテストとして使わなければならない．それは次のように展開するだろう．宇宙は，熱力学的平衡を特徴付ける完全なカオスのような複雑な揺らぎとしては説明されないという仮説に，何らかの理由で極めて小さな確率が与えられると仮定しよう．すべての状態の可能性は等しいという考え方が正しい先験的確率は，たとえば $1-10^{-100}$ だったとする．次に，秩序状態の数を何らかの方式で表わす．たとえば，その秩序を 100 万語未満で記すことのできる状態すべてをリストアップしたとしよう．そして残りの 10^{-100} という確率を，宇宙が過去の何らかの秩序状態から進化してきたという仮説に割り振ったとする．つまり，すべての状態の可能性が等しいという偏見を採用するが，観測によるテストによってこの熱平衡仮説が否定される可能性も残したいと考える．

次に，周囲の世界の観測を始めよう．我々は，記述可能な秩序をもつ状態を見出だすだろう．誰もが今朝，地面を下に，空気を上に見たはずだ．そのような観測一回だけでも，初期状態の可能性についての

帰納的な判断において，ある秩序状態の確率を大幅に増す．そして観測を繰り返すにつれて，その確率は10^{-100}さえ超えるかもしれない．確率の増加は，次の定理に基づき計算できる．つまり，状況Aの先験的確率がP_aで，状況Bの先験的確率がP_bであり，また，AだったらありそうだがBだったらありそうもない観察結果が得られたとしよう．すると，Bの場合に比べてAの場合にその観察結果が得られる可能性が大きいその割合だけ，Aの経験的確率は増加する．

宇宙のある片隅を観測すると，そこは平衡状態から大きくはずれていることがわかる．これが単なる揺らぎである確率は，極めて小さい．その確率を10^{-2000}まで減らすには，マクロなレベルでの観測を1回すればよい．5000個の分子だけが秩序をもった状態になっていれば十分である．つまり特別な状態のみが，この世界に見られる最高度の秩序を生み出せることは，全く明らかである．

では，熱力学の公理が誤解を招いているとしたら，熱力学をどのように考えるべきなのだろうか．問題は我々が常に現実的な状況では実験をせず，望ましくない秩序をもたらす状況を捨ててから実験を行なっていることである．金属の缶の中に入っている気体について測定をする場合，我々は注意深く「熱力学的平衡に達するまで待つ」(何回，この表現を聞いただろうか)．そして，ヒューズがとんで電気が切れたり，誰かがハンマーで缶を叩いたといった，装置に何か特別なことが起こった状況をすべて捨てている．我々は宇宙についての実験を，宇宙を見たままにはしていない．むしろ実験するシステムを注意深く用意するために，状況を管理しようとする．

統計力学の公理をもっと上手に説明するには，次のようにすればよいだろう．まず我々は，気体のような(古典的)システムのすべてを，無限の精度で知っているとしよう．つまり，ある時刻$t=0$で，すべての粒子の位置と速度がわかっているとする．すると，もし自然の法則が正確にわかっていれば，その後の任意の時刻でのすべての粒子の振る舞いや状態を正確に計算することができる(実際問題としての難しさは別として)．しかしもし，ある一つの粒子の位置や速度，あるいは粒子の相互作用についての知識など，計算に関わる何らかの事実についての測定あるいは知識に何か小さな不確実さがあったとしよう．その不確実さが何であるかは問題ではない(数学者が作り出す特殊な反例は除くが)．もし不確実さが存在するならば，その不確実さについて平均をとることによって最終状態を表わさなければならない．そしてもし十分長い時間が経過すれば，そしてその時間は不確実さやシステムが大きくなるほど短くなるが，予想測定値は，熱力学的平衡の理論によって与えられるものと，非常に近くなる．

たとえば，時刻$t=30$分での6番目の分子の速度を，たとえば133番目の分子の位置と速度など，システムの他の変数の初期値の関数としてプロットしたとすれば，非常に細かな構造をもった極めて複雑な曲線が得られるだろう．そして問題の変数の初期値における有限な不

確実さについて平均すれば，「平衡状態」の結果が得られるだろう．つまり，最終値の分布は，「平衡状態」での分布に非常に似たものになる(図 2.2).

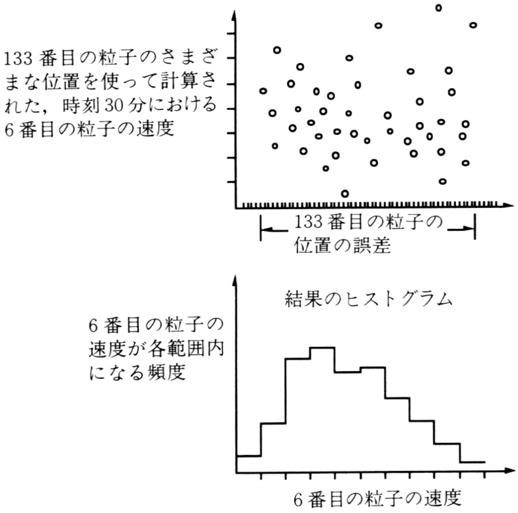


図 2.2

物理的に満足のいく熱力学や統計力学の議論をするには，まず，システムでは，さまざまな現象がさまざまな割合で起こるということを認識しなければならない．そしてその割合が互いに十分に異なるときにのみ，熱力学は役に立つ．つまり熱力学の理論では，遅いプロセスと速いプロセスを区別しなければならない．気体の熱平衡について語るとき，我々は無限の時間ではなく，考慮しているタイプの平衡をもたらす相互作用(たとえば分子の衝突)と比べて十分に長い時間待つのである．金属の缶の中の酸素について調べるときは，缶の壁が酸化するほど長い時間は待たない．あるいは，金属が有限の蒸気圧をもっているからといって，それが蒸発するまで待つこともしない．分子が衝突するときに極めて稀には起こりうる，すべての原子核反応を考慮することもしない．

理論を数学的に厳密に取り扱うとき，その結果の解釈には慎重でなければならない．物理的な厳密さが十分でないおそれがある．もし，理論の定義において何かわずかに間違っていることがあると，数学はその間違いからばかげた結論を導きだすかもしれないからだ．

問題は，過去における宇宙の状態が何か特別なものであったという考え方を，量子力学でいかに表わすかという点にある．すぐ考えられる方法は，世界の波動関数(もしそのようなものがあるとすれば)は，$t=-$(宇宙の年齢) のときは ψ_0 であったとすることである．しかしそのことは，現在の波動関数 ψ が我々の世界ばかりでなく，同じ初期状態から進化した他の可能な宇宙すべてを表わすことを意味する．これは，大きなスケールでの猫のパラドックスである．この波動関数には，「我々の世界」と，量子的に起こった事故で死亡した他のすべての死

んだ猫が，同時に表わされている．この波動関数から「波束の収縮」によって「我々の世界」が得られる．収縮の機構は何だろうか．観測者が量子力学(つまりシュレーディンガー方程式)によって表わされない何かをすると仮定するか，過去から生じ得るすべての可能な世界が等しく「現実」であると考えなければならない．どちらかの選択が「悪い」と言うのではなく，私の考えでは現在の量子力学は，そのいずれか一方を意味すると言いたいのである．

2.2　机上の理論の問題点

新しい理論を構築する際には，その理論が，それから具体的な結論が導かれるような厳密なものとなるよう注意を払う．実験や最初の前提と矛盾するたびに，その細部を変更できるような理論は望ましくない．曖昧な理論は，それがまったくばかばかしいものではない限り，矛盾が出るたびに，さらに曖昧な議論によって繕うことができる．そして証拠よりも単なる机上の議論を信じ始めると，理論は惨めな状態に陥ってしまう．このようなことが，統一場の理論に起きた．たとえばある理論は，電磁場テンソルに「付随する」テンソル $J_{\mu\nu}$ があるという．しかし，「付随する」とは何を意味するのだろうか．公平に考えれば，この理論は間違った結果を予言するだろう．しかし「付随する」という意味を定めなければ，何が主張されているのかわからない．この「付随する」という言葉が，何らかの新しい関係を「示唆」しようとしているのだと言っても，何ももたらさない．誤った予測が導かれても，そのたびに，理論が間違っているのではなく，「示唆」が間違っていたことが原因だとされる．そして，新しい反対称テンソルを加えて何らかの手直しをしようと考え続ける．このような議論は，何かの量の間の偶然の関係を見つけた数占いの話以上に信頼できるものではない．そのような関係は，その量の測定精度が上がるたびに修正され続けなければならない．まず最初の桁を合わせ，そして測定値の誤差が減るたびに，それに合わせるために細かく修正していかなければならない．

この関連で，ある逸話を話そう．数年前のパリでのカクテル・パーティ後の会話である．そのとき，なぜかすべての女性がいなくなった時間があり，私は，厳格な顔をして安楽椅子に座り，自分の学生たちに囲まれたある有名な教授と向かい合っていた．彼は私に，「ファインマン先生，光子の静止質量がゼロだということに，貴方はどの程度確信がありますか」と尋ねた．「それは質量に依りますね．もし質量が，何の効果ももたないほど無限に小さいとしたら，その存在を否定することはできないでしょう．質量がある値よりも大きくはないかという問題だったら喜んで説明しますが．ただし，その値の質量について説明した後で，その値を変えないことを条件にしましょう」と私は答えた．そこでその教授は，電子の質量の 10^{-6} 倍という値を選んだ．

■ 正確に書けば
$$\hbar\omega=\sqrt{(\hbar kc)^2+(mc^2)^2}$$
で，光子のエネルギー E の
$$E=\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}$$
という関係に相当する．速度は ω/k なので，$m\neq0$ ならば一定ではない．

私の答は，次のようなものであった．もし光子の質量 m が振動数 ω と $\omega=\sqrt{k^2+m^2}$ のように関係していることを認めるとすれば，異なる波長の光子は異なる速度で伝播する．すると十分に遠方にある星食を起こす連星を見たとき，青い光と赤い光の星食が異なる時刻に観測されることになる．しかしそのような現象が観測されることはないので，そのことから質量の上限値が求まるが，それは電子の質量の 10^{-9} 倍程度になる．この解答は教授に通訳された．すると彼は，もし電子の質量の 10^{-12} 倍だったらどうなるかと尋ねた．通訳していた学生はこの質問に困惑し，また私も，これは約束違反だと抗議したが，とにかく答えることにした．

もし光子が，すべての光子に共通の小さな質量をもっているとしたら，波長が長くなるほど，無質量の場合の振る舞いからのずれが大きくなると予想される．そのためレーダーのパルスの反射の鋭さから，連星の結論よりも厳しい質量の上限値が求まり，結果は，電子の質量の 10^{-15} 倍である．

すると教授は質量の値を再度変えて，電子の質量の 10^{-18} 倍とした．学生たちは皆，この質問に困惑していた．私も，約束違反を続けてどんどん小さな値を持ち出すなら，いつかは解答できなくなると抗議したが，今度も結局答えることにした．そして彼に，もし光子が小さな質量 m をもっているのなら，ポテンシャルは $\exp(-mr)/r$ のように振る舞うという場の理論の議論に同意するか尋ねた．彼は同意した．地球の周囲には静的な磁場があり，それは宇宙線の振る舞いから，宇宙空間にある程度，少なくとも地球の半径の数倍は広がっていることがわかっている．したがって，光子の質量による減衰率は 8000 マイル程度よりも長いことになり，それは光子の質量の上限値が，電子の質量の 10^{-20} 倍以下であることを意味する．ここで会話は終わり，私はほっとすることができた．

知られている場から重力理論を構築するのに，問題に出会うたびに結合定数の大きさを調整したり新しい公理を導入するなど，これと同じようなまねはしたくない．場について知られている振る舞いを使い具体的な理論を提示し，もし結果が不適切だったらそれを放棄する覚悟をもっていなければならない．

2.3　1ニュートリノの交換

ニュートリノ 1つの交換によって重力のような力が得られるか，調べてみよう．この理論の厳密な定式化や徹底的な研究をするわけではない．少し検討してみればわかるように，有望とは思えないからである．この理論を否定する理由となる問題点を，何とか取り繕うことはできるかもしれない．しかし私は，前項で述べた約束に従いたい．つまり，新しい公理を導入したりせず，粒子の知られている性質だけを使った説明を試みる．そして，結論は否定的である．

ニュートリノの質量はゼロなので，ニュートリノ交換により $1/r$ のように振る舞うポテンシャルが生じるかもしれない．しかしそのスピンは半整数なので，1粒子交換では静的な力にならない．ニュートリノを放出した粒子はもとの状態ではありえないからである．粒子交換によって力を得るには，その交換を表わすダイアグラムが，散乱振幅の対角成分と干渉しなければならない．つまり，何も起こらないという振幅に加えられるものでなければならない(図2.3)．したがって，半整数の角運動量を状態の変化なしで放出することができないという事実により，1ニュートリノ交換から静的な力を得る可能性は排除される．

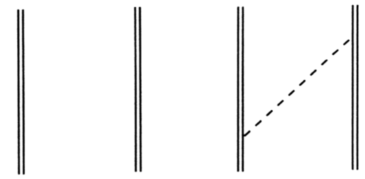


図2.3

質量もスピンもない中間子は $1/r$ に比例するポテンシャルを生み出す．そのような粒子の運動量空間での伝搬関数は $1/k^2$ である．一方，ニュートリノの伝搬関数は $1/\not{k}$ つまり $\not{k}/k^2$ であり，分子に k に依存する項を含む．そのためにいっそう，ニュートリノを重力のような力と結び付けるのは難しい．相互作用によるエネルギーの変化は，運動量空間よりも座標空間で計算するほうが容易である．スピンがゼロの中間子の場合は，伝搬関数 $\delta_+=1/(t^2-r^2+i\epsilon)$ を可能な放出時間と吸収時間全体で積分する(図2.4)．それによるエネルギーの変化は，係数を省略すると

■ここで，$\not{k}$ は $\not{k}\equiv k\cdot\gamma$ で定義される．γ とはディラック方程式に現われる行列.

$$E \propto \int \frac{idt}{(t^2-r^2+i\epsilon)} \propto \frac{1}{r} \qquad (2.3.1)$$

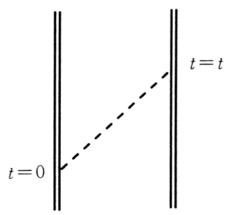


図2.4

となる．積分は放出時刻のみ(あるいは吸収時刻のみ)行なう．他方の積分をすると全体に時間を掛けることになるが，それは位相の変化を表わすだけであり相互作用エネルギーには対応しない．

質量がどのような形で係数に現われうるのかはまだ説明していないが，スピンのないニュートリノというものは知られていないので，さらに議論を続けても意味がない．この理論は，ニュートリノが1/2のスピンを持ち去るということによって，否定される．

2.4　2ニュートリノの交換

しかし，一度に2つのニュートリノを交換し振幅の対角成分を得れば，重力という力を生み出す理論が作れるかもしれない．2つの大きな物体間の相互作用によるエネルギーが正確にその質量に比例することを理解するのは容易ではないが，少なくとも，各物体中の粒子数にほぼ比例することは明らかだろう．厳密なことは考えずに(他のすべての問題がうまくいけばこの点に戻るべきだが，実際はその必要はなくなる)，2つの物体の間の相互作用が，$m_1\cdot m_2$ に，構成粒子1対間の相互作用を掛けたものに比例するとしよう．相互作用する粒子の質量 $m_1\cdot m_2$ は，粒子総数を表わすために入れる．dt の時間内に1対のニュートリノを放出する振幅を，$G'dt$ とする．また，1つのニュートリノがある位置から別の位置に移動する振幅は $1/(t^2-r^2+i\epsilon)$ である．

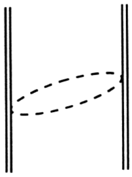
すると 2 つの物体間のエネルギーは

$$E = m_1 m_2 G'^2 \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)^2} \qquad (2.4.1)$$

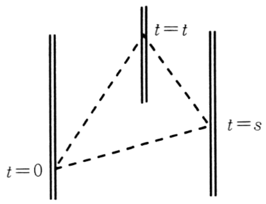
となる．この積分は留数定理によっても，あるいは式(2.3.1)を単に微分することによっても，容易に求めることができ，結果は，

$$E = m_1 m_2 \frac{G'^2 \pi}{2} \frac{1}{r^3} \qquad (2.4.2)$$

となる．ここで r は粒子間の間隔である．したがって，2 ニュートリノ交換では正しい r 依存性は求まらず，この理論は失敗したように見える．しかしさらに分析すると，望みが出てくる．3 つの物体間での交換を考えることによって，$1/r$ のように振る舞う項が得られるのである．3 粒子のどれを見ても 2 つのニュートリノが交換されているようなプロセスを考えることができる(図 2.5 の下側)．最初の放出が $t=0$ で起きたとし，他の頂点は時刻 t と s に起きたとしよう．するとエネルギーは，



最初の理論



新しい理論

図 2.5

$$G'^3 m_1 m_2 m_3 i^2 \int \frac{ds\, dt}{(s^2 - r_{12})(t^2 - r_{23})[(s-t)^2 - r_{31}]} \qquad (2.4.3)$$

この式は留数定理による積分を 2 回繰り返して計算することができ，結果は，

$$E = -G'^3 m_1 m_2 m_3 \pi^2 \frac{1}{(r_{12} + r_{23} + r_{13}) r_{12} r_{23} r_{13}} \qquad (2.4.4)$$

もし，たとえば物体 3 が非常に遠方にあり，r_{13} が r_{12} よりもはるかに大きいとすると，物体 1 と 2 の間の相互作用は r_{12} に反比例することになる．

物体 3 とは何を意味するのだろうか．明らかにこれは，宇宙全体のすべての物質の何らかの平均である．物質が物体 1 と 2 の遠方に球対称に分布しているとすれば，その効果は平均密度の積分として，

$$E = -\frac{G'^3 m_1 m_2 \pi^2}{r_{12}} \int \frac{4\pi\rho(R) R^2 dR}{2R^3} \qquad (2.4.5)$$

と表わされるだろう．ただし $R \approx r_{13} \approx r_{23}$ である．概算として，密度はある球殻内で一定だとしよう．そしてその球殻の内径 R_i は r_{12} に比べて十分大きいとする．すると積分の結果は，

$$E = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}} 2\pi^3 G'^3 \ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right) \rho \qquad (2.4.6)$$

となる．外径 R_0 は $Tc = 10^{10}$ 光年 $= 10^{28}$ cm 程度であろうから，この対数は 50 あるいは 100 よりずっと大きい値にはならないだろう．このタイプのエネルギーは，重力に非常に似た振る舞いを示す．

では，この理論を否定できるだろうか．実際，2 つの方法で否定できる．第一に，この対数項の大きさは，ニュートンの法則がすでに検証されている距離より遠方で，$1/r^3$ に比例する直接的な力(2.4.2)に匹敵した大きさになる．また，地球と月の間の重力に対する太陽の影響を考えると，太陽と地球の距離は軌道に沿って変化するので，月の

■つまり，より近距離では(2.4.2)の力のほうが強くなってしまう．

軌道に観測可能なずれが生じることがわかる．この効果を，次のように評価しよう．まず地球と月の間の重力への太陽の寄与を，他のすべての星の寄与と比較する．影響は質量に比例し，距離の3乗に反比例する．対数が1000よりも小さいとすると，星の密度を適切に見積もれば，太陽の寄与は星の寄与の10^{12}倍にもなる．したがって星の寄与は無視することができる．しかし，地球と太陽の距離の$\pm 2\%$程度の変動から生じるはずの，実質的重力定数の変動による運動の揺らぎは，地球-月システムでは観測されていない．

それでもこの理論を救うことは可能だろうか．4つあるいはそれ以上のニュートリノが関与するような高次のプロセスが，これらの困難を救うかもしれない．図2.6のような項は，m_3^2に比例する寄与をするのは明らかである．周囲の粒子数の2乗に比例するので，遠方の銀河の影響は，太陽の効果をはるかにしのぐだろう．さらに高次の効果を考えれば，遠方の寄与はさらに大きくなる．したがって，図2.7のタイプのさまざまな次数のダイアグラムを足し上げなければならない．しかしフェルミ統計を考えると，各次数の項の符号は互い違いになるので，満足のいく結論が求まるとは思えない．

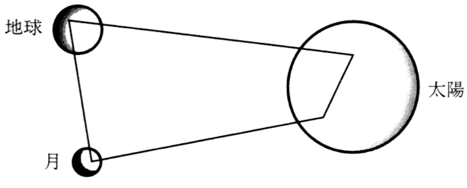


図2.6

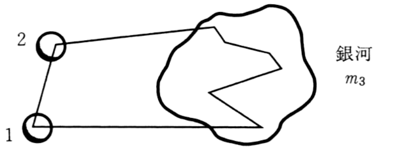


図2.7

このアイデアをもっと形式的に説明すると，我々がここで推測しているのは，（たとえばスカラー場ϕが）$\bar{\phi}\phi^2\phi$のような2次の結合をもつ理論で，多くの銀河が存在する状態での2つの場の積$\phi(1)\phi(2)$の期待値が

$$\langle\phi(1)\phi(2)\rangle = \delta_+(S_{12}^2)+C$$

となるだろうということである．最初の項は通常の真空期待値であり，Cは遠方の銀河との相互作用による項である．実際上このCは，1と2の距離が宇宙の半径に比べて小さければ，事実上それらには依存しないだろう．

しかしスピン1/2の場合，Cという項はありえないと私は考える．光子の場合でも，その結合は2次ではないので，私の考えでは，このような項が生じたとしても望ましい効果はもたない．

結局，ニュートリノ対による理論は有益な結果をもたらさなかった．しかしその研究によって学んだこともある．もし重力の理論を，1つの物体が他の2つから大きく離れている3体の相互作用によって構築しようとするならば，交換される量子が整数スピンをもっており，またポテンシャルの強度が遠方の物体中の物質の量に比例するとすれば $1/r$ 則が導かれる．物理法則に影響するとは思われなかった銀河が，重力において重要な役割を果たしているのかもしれない．

しかしそのような理論を構築するには，宇宙のすべての物質と2次で結合する，質量をもたないボゾンが存在すると仮定しなければならない．そして，なぜその力が厳密に質量に比例しているのかという問題にも戻らなければならない．しかし，そのような困難な道をたどる理由があるとは思えない．知られている粒子では，このような理論は構築できないからである．そしてもし新しい粒子を導入することが許されるなら，物質と1次で結合する質量をもたないスピン2の粒子の存在を仮定することによって，何も問題のない理論を作ることができるのである．

第3章

3.1 重力のスピン

仮想上の金星の科学者の観点から，知られている場による重力の解釈の可能性について議論してきた．彼らは場の理論の一般的な性質について知っていると仮定する．そして彼らは今，重力の性質をもつ場を探しているとしよう．さまざまな可能性を区別するには，重力についての以下の性質を思い出しておく必要がある．大きな物体は，その慣性に比例し，距離の二乗に反比例する引力をもつ．また，慣性とは物体のエネルギーを表わしており，原子や原子核の束縛エネルギーも静止質量と同一の重力的振る舞いをもつ．

彼らのうちのあるグループは，我々が前章でしたように，知られている粒子を使って重力を解釈しようとし，そして失敗するだろう．他のグループは，重力として振る舞う新しい場の性質を推理し始めるだろう．

第一に，重力は長距離力であるという事実は自動的に，相互作用のエネルギーが距離に，$1/r$ のように依存することを意味する．場の理論にはそれしか可能性はない．場は，今後我々が重力子と呼ぶ粒子の交換によって担われる．$1/r^2$ に比例する力を導くためには，その質量はゼロでなければならない．場の理論を書き下す前に考えるべきもう一つのことは，重力子のスピンは何かという問題である．もしスピンが 1/2 あるいは半整数だったら，前章の 2.3 節で説明した困難に陥る．つまり 1 粒子交換と何も起こらないプロセスとの間の干渉がありえない．したがって重力子のスピンは整数 0, 1, 2, 3, 4, … のうちのいずれかでなければならない．距離依存性は質量のみによって決まるので，そのいずれでも $1/r$ に比例する相互作用が求まる．スピンによる違いを見るには，重力子の効果のスピンによる微妙な違いを見なければならない．金星の科学者たちは作業を分担し，ある人はスピン 0 の理論を調べ，別の人はスピン 1 を調べ，またスピン 2, 3 さらに 4 を調べる人もいるかもしれない．スピンが大きくなるほど結果を得るための労力が増すので，小さいほうから順番に考えてみよう．

スピン 1 の理論は，実質的に電気力学と同じである．2 つのスピン 1 の場の存在を禁じる理由はないが，重力子はその 1 つではありえない．なぜなら，スピン 1 の場合は，同種の粒子は引き付け合い，異種の粒子は反発するからである．実際，これは奇数スピンの理論では常

に成り立つ．逆に，偶数スピンは常に引力を生み出すので，我々はスピン 0, 2, そしていずれも失敗したら 4, という順番に調べればよい．単純な理論では不適切だという結論が出るまでは，もっと複雑な理論を考える必要はない．

スピン 0 の重力理論は，束縛エネルギーの重力に対する振る舞いに基づき否定される．ここで詳しい分析をする必要はない．類推による議論をし，それからすぐにスピン 2 の理論の構築に進む．動いている物体間の引力について考えてみよう．それは静止している物体間よりも小さいだろうか．たとえば，2 つの気体の固まりの間の引力を計算する．重力に関する実験的証拠によれば，気体が熱いほど力は強くなる(図 3.1)．

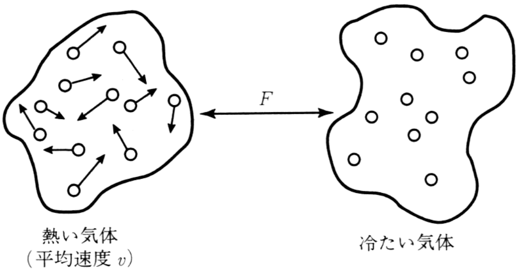


図 3.1

■γ_t はディラック方程式に現われる γ 行列の時間成分.

電気力学では何が起こるかわかっている．電気力は，粒子の乱雑な動きによっては変化しない．相互作用エネルギーは演算子 γ_t の期待値 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ に比例する．この演算子から生じるポテンシャルには速度依存性はないので，比例係数は $\sqrt{1-v^2/c^2}$ に比例しなければならない．したがって，スピン 0 の場の場合の演算子 1 から生じる相互作用エネルギーの場合は，$\sqrt{1-v^2/c^2}$ に比例することになる．つまりスピン 0 の理論では，熱い気体の固まり間の引力は，気体が冷たい場合と比べて小さいことになる．同様に，スピン 2 の理論では相互作用エネルギーが分母に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ をもつので，束縛エネルギーの重力効果に関する実験結果と合致する．したがって，スピン 0 の理論は否定され，引力をエネルギーに比例させるためには，スピン 2 の場が必要であることがわかる．

3.2 典型的な理論である電気力学での振幅と偏極

我々のプログラムは結局，すでに知られている他の場の理論との類推に基づき，スピン 2 の理論を構築することである．この時点で，正しい重力理論を得たアインシュタインの観点に移ることもできるだろう．しかし正しい理論の性質を推定するためには，金星の科学者の物語を続けたらどうなるか調べることが教訓的であるし，おそらく，より容易でもあるだろう．その方針がうまくいくとしたら，今日の多くの科学者が正しい重力理論を見つけることができることになるが，だ

からと言ってアインシュタインの業績の価値が下がるわけではない．今日我々は，50年前には存在していなかった，すでに開発された定式という後知恵をもっており，アインシュタインが示した方向も知っている．もし我々が現在もつ知識をもっていなかったとしたら，我々が今何をしているか想像もしにくい．しかしいずれにしろ，電気力学との類推で正しい理論を推量していくことにしよう．

スカラー，ベクトルそしてテンソル(つまりスピンが0，1そして2)の場の理論では，場はスカラー，ベクトル，またはテンソルのポテンシャル関数で表わされる．

スピン0　X　スカラー・ポテンシャル

スピン1　A_μ　ベクトル・ポテンシャル

スピン2　$h_{\mu\nu}$　対称テンソル・ポテンシャル

テンソルは反対称であると仮定すれば別の理論が得られるだろうが，それは重力というよりは電磁気のようなものになる．反対称テンソルの6つの独立の成分は2対の3次元ベクトルとして振る舞う．

電磁気の発生源はベクトル・カレント j_μ であり，ベクトル・ポテンシャルとは

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2}j_\mu \tag{3.2.1}$$

■添字については付録Bの最後(p. 199)の部分を参照.

の関係にある．ここではフーリエ変換をし運動量表示を使う．ダランベルシアンは運動量空間では単に k^2 である．電磁気での振幅は，図3.2のダイアグラムで表わされるような，カレントをつなぐ伝播関数を使って計算される．このようなプロセスの振幅を相対論的不変量の関数として計算し，運動量とエネルギーの保存則の要請に基づいて答を制限する．電磁気の実質は，カレントと場の間の具体的な相互作用 $j^\mu A_\mu$ の中に含まれている．これは，2つのカレントの間の相互作用

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu \tag{3.2.2}$$

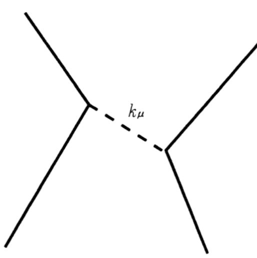


図3.2

を与える．座標軸を適当に選ぶと，ベクトル k_μ は

$$k^\mu = (\omega, \kappa, 0, 0) \tag{3.2.3}$$

と表わされる．成分の順番は4, 3, 2, 1となるようにしているので

$$\begin{aligned} x^\mu &= (t, z, y, x) \\ A_\mu &= (A_4, A_3, A_2, A_1) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

である．すると交換される粒子の運動量が k_μ であるときは，カレント-カレント間の相互作用は

$$-j'_\mu\left(\frac{1}{k^2}\right)j^\mu = -\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(j'_4j_4 - j'_3j_3 - j'_2j_2 - j'_1j_1) \tag{3.2.5}$$

カレントの4次元発散がゼロであるという電荷の保存則は，運動量空間では単に

$$k_\mu j^\mu = 0 \tag{3.2.6}$$

という制限になる．我々が使っている座標系では，この制限はカレントの第3成分と第4成分を関係付ける．

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0, \quad \text{あるいは} \quad j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4 \qquad (3.2.7)$$

この式の j_3 を振幅 (3.2.5) に代入すれば

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right) j^\mu = \frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_1 j_1 + j'_2 j_2) \qquad (3.2.8)$$

この式の 2 つの項の解釈を示そう．カレントの第 4 成分は，単に電荷密度である．静的な電荷の場合は，ゼロでない成分はこれだけである．第 1 項は振動数に依存しない．これを座標空間表示にするために逆フーリエ変換をすると，瞬間的に作用するクーロン・ポテンシャルになる．

$$(\mathrm{F.\,T.})^{-1}\left[\frac{j'_4 j_4}{\kappa^2}\right] = \frac{e^2}{4\pi r}\delta(t-t') \qquad (3.2.9)$$

速度が遅い極限では，これが常に主要項となる．この項は同時刻での作用を表わすが，2 つの項への分離が共変的ではないからに過ぎない．相互作用全体は共変な量であり，第 2 項が，瞬間的に作用するクーロン・ポテンシャルに対する補正を表わす．

2 つのカレントの間の相互作用には常に，仮想光子が関与する．$\omega = \pm\kappa$ にある相互作用の振幅の極を見ることによって，実粒子の性質について学ぶことができる．もちろん，光子は相互作用しない限り観測されないので，物理的効果をもつ光子はすべて仮想光子とみなすことができ，観測される光子が厳密に $\omega = \pm\kappa$ であることはありえない．しかし極限を考えることに何も問題はない．物理的には，我々は月や太陽からくる光子を知っており，その ω と κ の違いは極めて小さい．数百万光年の遠方にある銀河からの光子を観測する場合には，極以外の物理的効果がないほど極に近いと考えて構わない．$\omega = \kappa$ の極の留数は 2 つの項の和であり，それぞれが 2 つの因子の積である．j_1 や j'_1 と相互作用する光子と，j_2 や j'_2 と相互作用する光子の 2 種類があるように見える．通常の言葉を使えば，光子には 2 種類の偏極(偏光)があるということになる．

円偏光は，面偏光した光子の一次結合に他ならず，和 $(j'_1 j_1 + j'_2 j_2)$ の，別の分け方に対応する．

$$(j'_1 j_1 + j'_2 j_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 + ij'_2)^* + \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j'_1 - ij'_2)^* \qquad (3.2.10)$$

この形でも，光子に 2 種類あることがわかる．この形の利点は伝播の方向 3 を軸とした座標系の回転を考えると明らかになる．円偏光した光子は互いに移り変わらず，座標系が角度 θ だけ回ると，位相のみがそれぞれ $\exp(i\theta)$ と $\exp(-i\theta)$ だけ変化する．

回転に対する系の振る舞いについての量子力学の規則によれば，このような性質をもつ系は角運動量が決まった状態にある．位相が $\exp(i\theta)$ だけ変わる光子は角運動量の回転軸方向の成分が 1，また位相が $\exp(-i\theta)$ だけ変わる光子は -1 である．

もし光子がスピン1の粒子だとすれば，スピンの回転軸方向の成分が0の第三の光子が存在すると思うかもしれない．しかし質量のない粒子の相対論的理論によれば，伝播方向のスピンの成分は最大と最小の2通りしか許されないことが示される．これはいかなるスピンをもつ粒子についても成り立つ，ウィグナーによって証明された定理である．我々はそれを証明することはせず，ここでは光子，そして後では重力子という，当面の問題であるケースに対してのみ，相互作用を具体的に分離することによって，これら2つの状態の存在を示す．

これらの 2つの状態の存在は，光子自体ではなく，その発生源であるカレントに対して証明しただけであると，異議をとなえる人もいるかもしれない．しかしどちらにしても同じことである．たとえば円偏光 −1 の光子の放出の振幅は，(j_1+ij_2) というカレントで与えられるからである．座標系を回転しても放出の振幅は変わらないはずなので，光子も同じだけの位相変化をもたなければならない．おそらく光子の実際の偏極(偏光)は，ベクトル・ポテンシャルの特定の方向 e_μ (単位ベクトル)への射影によって定義するのが最善だろう．その光子とカレント j^μ との相互作用，つまりその光子の吸収または放出の振幅は

$$-e_\mu j^\mu = (j^\mu \text{ の } e_\mu \text{ 方向への射影}) \qquad (3.2.11)$$

と表わされる．

3.3　重力子交換の振幅

電気力学との類比によって，重力子交換の振幅を書き下そう．瞬間的な非相対論的項に特別の注意を払わなければならない．重力に対する現在の実験的観測で明らかになっているのは，その項だけだからである．理論全体では，(クーロン相互作用に類似の)瞬間的作用の項と，遅延波として現われる補正項の両者がある．観測可能な効果を計算するには，遅延効果を分離しなければならない．

運動量空間でのダランベルシアンは k^2 だと仮定する．式 (3.2.1) からの単純な類推で，場のテンソルは，そのソース(発生源)・テンソルと

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} T_{\mu\nu} \qquad (3.3.1)$$

という関係で結ばれていると考える．この相互作用はどのようなものだろうか．電気力学とカレントの関係から，相互作用のエネルギーはソース・テンソルによって

$$T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} \qquad (3.3.2)$$

となると考えよう．重力の特徴が再現されるようにこのテンソル $\boldsymbol{T}$ の具体的な性質を定めることが，我々の仕事である．テンソル $\boldsymbol{T}$ は微分，つまりベクトル $\vec{k}$ を含んでよい．そして微分が含まれている

■ダイポールとは，$1/\kappa^4$ の項をあらわす．

場合にのみ，ダイポールを避けることができる．最も単純なものはモノポールだろう．電荷密度 j_4 との類推で，テンソル $\boldsymbol{T}$ は，非相対論的極限でエネルギー密度が現われるようなものであってほしい．よく知られているように，電磁気学ではエネルギー運動量テンソル(応力テンソル)というものがあり，その成分 T_{44} はまさに電磁場のエネルギー密度になる．したがって，T_{44} が全エネルギー密度となるような，より一般的なテンソルがあることが予想される．それを使えば低速度極限で，ニュートンの万有引力の法則，つまり相互作用エネルギー

$$-\frac{T'_{44}T_{44}}{\kappa^2} \tag{3.3.3}$$

が得られる．つまり正しい相対論的理論を得るには，(3.3.2) で推定したように，振幅はテンソル $\boldsymbol{T}$ 全体を含んでいなければならない．

このテンソルについてまだ述べていない点が 1 つある．対称テンソルのトレースは不変量であり，必ずしもゼロではない．したがってトレースがゼロでない対称テンソルを使うと，スピン 0 とスピン 2 が混合した理論ができるかもしれない．そのような理論では，相互作用を偏極に基づいて分離する段階で，無質量のスピン 2 の粒子に許される 2 つの偏極ではなく，3 つの偏極に相当する項が得られるだろう．そこで，相互作用 (3.3.2) の他に他の不変な形 $T^{\mu}_{\ \mu}(1/k^2)T^{\nu}_{\ \nu}$ が含まれているかもしれないと考え，これらの 2 つの項の割合を調節し，角運動量がゼロの実重力子が交換されないようにする．

まず相互作用を次のように書き表わそう．

$$T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\Big[T'_{44}T_{44}-2T'_{43}T_{43}-2T'_{42}T_{42}-2T'_{41}T_{41}+2T'_{23}T_{23}$$
$$+2T'_{31}T_{31}+2T'_{21}T_{21}+T'_{33}T_{33}+T'_{22}T_{22}+T'_{11}T_{11}\Big] \tag{3.3.4}$$

電気力学では，電荷の保存則を使って単純化した．ここではエネルギー保存則を使う．それは運動量空間では

$$k^{\mu}T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3.5}$$

k_1 と k_2 がゼロとなる我々が使っている座標系では，これは添字 4 をもつ成分と添字 3 をもつ成分を関係づける．

$$\omega T_{4\nu} = -\kappa T_{3\nu} \tag{3.3.6}$$

この関係を添字 3 を消去するために使うと，振幅は，分母に κ^2 を含む瞬間的作用の部分と，分母に $(\omega^2-\kappa^2)$ を含む遅延部分に分かれる．瞬間項は

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)-2T'_{41}T_{41}-2T'_{42}T_{42}\right] \tag{3.3.7}$$

で，遅延項は

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}[T'_{11}T_{11}+T'_{22}T_{22}+2T'_{21}T_{21}] \tag{3.3.8}$$

となる．テンソル $\boldsymbol{T}$ の横方向の成分はおそらく独立なので，これは 3

つの独立な項，つまり3つの偏極の項の和を表わす．この理論はスピン0とスピン2の混合となる．スピン0の部分を取り除くには，振幅に

$$\alpha T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu} \tag{3.3.9}$$

という形の項を加えなければならない．遅延項に関しては，この追加により次の項が加わる．

$$\alpha\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22})$$

ここでパラメーターαを調整し，遅延項中の独立な項を2つだけにすることができる．適切な値は$\alpha=-1/2$であり，そのときは遅延項全体は

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left[\frac{1}{2}(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22})+2T'_{12}T_{12}\right] \tag{3.3.10}$$

となる．偏極には2つの方向があり，それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}-T_{22}),\quad \sqrt{2}\,(T_{12}) \tag{3.3.11}$$

という組み合わせで生成される．規格因子の違いはテンソルの対称性の結果である．

$$\sqrt{2}\,T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12}+T_{21}) \tag{3.3.11a}$$

というように書けば，より対称的になる．したがって重力子の平面波解は

$$h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}\exp(ik_{\sigma}x^{\sigma}) \tag{3.3.12}$$

となり，偏極テンソル$e_{\mu\nu}$のゼロでない成分は

$$e_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad e_{22}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{あるいは}\quad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.3.13}$$

相互作用全体

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T'^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{k^2}T^{\nu}{}_{\nu}$$

は

$$T'^{\sigma\tau}P_{\sigma\tau,\mu\nu}T^{\mu\nu}$$

という形にも書ける．ここで重力子の伝播関数$P_{\sigma\tau,\mu\nu}$は

$$\frac{1}{2}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau}+\eta_{\mu\tau}\eta_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\tau})\frac{1}{k^2}$$

通常は簡便さのため，伝播関数を単に$1/k^2$とし，発生源から放出された仮想重力子の相互作用を，振幅

$$h_{\mu\nu}=\frac{1}{k^2}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma}\right)$$

で表わし，吸収の結合を$h_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$とする．

偏極$e_{\sigma\tau}$の実重力子の放出振幅は，もし(3.3.13)のように$e^{\sigma}{}_{\sigma}=0$とするならば，内積$e_{\sigma\tau}T^{\sigma\tau}$で表わされる．

3.4 振幅中の項の物理的解釈

重力子の偏極はテンソル量である．このことは，応力を説明するときに使う描像に似た方法で視覚化することができる．軸に垂直な表面内での方向を示すために矢印を描く．伝播の方向に垂直な面内に，図 3.3 のように 2 つの応力がある．四重極のストレスには 2 種類しかない．すべてが原点を向く（または原点の反対を向く）矢で表される応力は，液体の圧力のようなもので，スピンはゼロである．時計回り（あるいは反時計回り）の矢で表わされる「応力」(実際には回転だが)は，スピン 1 に対応する．

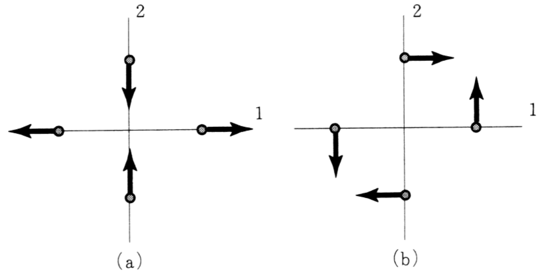


図 3.3

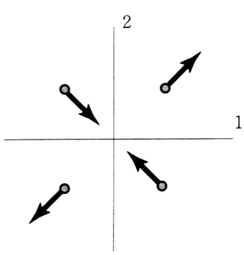


図 3.4

図 3.3(b) で表わされる応力は 45° 傾いた方向で考えるとよい．そうすると図 3.4 のようになり，これは図 3.3(a) が 45° 傾いた応力に他ならない．つまりこれらの 2 つの偏極は 45° の回転で移り変わる．90° 回転させればもとに戻る．矢印は逆向きになるが，偏極の振動による時間依存性を考えなければならない．このように考えると，360° の回転は位相の 720° の変化に相当する．すなわちスピン 2 である．これらの 2 つの偏極から，回転による位相の変化がそれぞれ $\exp(2i\theta)$ と $\exp(-2i\theta)$ となるような，2 つの独立な一次結合が作れる．これは単に，遅延項の別の分け方に他ならない．多少の試行錯誤の末，結果は

$$\frac{1}{4}(T'_{11}-T'_{22}+i2T'_{12})(T_{11}-T_{22}-i2T_{12})$$
$$+\frac{1}{4}(T'_{11}-T'_{22}-i2T'_{12})(T_{11}-T_{22}+i2T_{12}) \qquad (3.4.1)$$

となる．これらはスピン 2 で伝播方向の成分が ±2 のテンソルの性質をもつことは，これらの積と調和関数の積を比較すれば明らかである．実際，$(x \pm iy)(x \pm iy)$ は明らかにスピン 2 で z 方向の成分が ±2 であるが，それは $(xx-yy \pm 2ixy)$ となり，式 (3.4.1) と同じ構造をしている．つまり $\alpha=-1/2$ と選べば，重力子は 2 種類だけの偏極をもつことがわかった．これはおそらく，地球の理論家 Pauli と Fierz [FiPa 39] がすでに調べ，場のラグランジアンによって表現したスピン 2 の場の理論に等価な正しい理論であろう．

我々はスピン1の理論との類推でスピン2の理論を求めた．光子の平面波が伝播関数の極によって表わされ，重力子の伝播関数も $\omega=\pm\kappa$ に極をもつので，重力子の平面波の存在を前提にしたことになっている．しかし実験的な証拠はない．我々は重力子も，古典的な重力波さえも観測したことはない．

後で検討するが，今のところ，完全に無視されている問題がいくつかある．電磁気の発生源は保存し，重力の発生源であるエネルギーも保存する．しかしこの2つの保存は異なる性質もつ．光子は電荷をもたないが，重力子は $\hbar\omega$ というエネルギーをもっており，したがって，それ自体が重力子の発生源となる．このことを，重力場の非線形性と呼ぶ．

電磁気では，場の方程式(マクスウェル方程式)を導くことができ，それは電荷が保存していなければ矛盾するものであった．重力についてはこれまで，重力場ではなく振幅のみを扱い，場の方程式の議論を避けてきた．また，この理論がゲージに依存するかどうか，あるいはマクスウェル方程式 $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu=j^\mu$ に相当する場の方程式を書けるのかどうかも議論する必要がある．

場の方程式がなくても，相互作用の形だけを考えることによって議論できる物理的結果がいくつかある．$\alpha=-1/2$ の場合の振幅の完全な表式を書くと

$$
\begin{aligned}
2&\left[T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu}\right]\\
&=-\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right)+T_{44}(T'_{11}+T'_{22})\right.\\
&\qquad\left.+T'_{44}(T_{11}+T_{22})-4T'_{41}T_{41}-4T'_{42}T_{42}\right]\\
&\qquad-\frac{1}{\kappa^2-\omega^2}[(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22})+4T'_{12}T_{12}] \qquad (3.4.2)
\end{aligned}
$$

(望むなら，$(\omega^2/\kappa^2)T'_{44}T_{44}$ を，$T'_{43}T_{43}$ あるいは $(T_{44}T'_{33}+T_{33}T'_{44})$ とすることもできる．) 我々はすでに，遅延項とその偏極を検討した．テンソル $\boldsymbol{T}$ はエネルギー運動量密度である．遅い粒子に対しては空間成分は v/c のオーダーであり，ニュートンの法則は1つの項 $T'_{44}T_{44}$ だけで表わされる．他の項は，ある意味で磁気に類似したものである．この表式において，これらは瞬間項として現われる．遅延効果である伝播する波は，v/c の偶数次のみに現われる．

瞬間的な磁気的項は観測可能な効果をもつと考えるかもしれない．たとえば，車輪を高速で回転させたら，重力に僅かな変化が生じるだろうか．この理論は実際そのような効果を予言するが，その効果は極めて小さいばかりでなく，多くの他の効果によって隠されてしまう．プラスの荷電粒子とマイナスの荷電粒子の数が等しいため直接のクーロン力が極めて正確に相殺するので，電流が流れる2本の電線の間の磁気力は観測可能である．しかし重力はいかなる場合も引力であり相

殺は期待できない．回転する車輪の場合，物質の弾性応力がエネルギーに加わり，車輪は飛んでいってしまうかもしれず，さまざまな困難がある．それに加えて通常の重力でさえも測定が難しく，クーロン力に対する磁気効果と同様，重力の磁気的効果も $(v/c)^2$ の係数が掛かる．電流が流れる電線の間の力が，グラム重のオーダーであるのに対して，電線中の粒子間のクーロン力に相殺がなかったとすれば，その力は十億トンのそのまた数百万倍にもなる．

光速あるいはそれに近い速度で動いている粒子を考えれば，この磁気的効果を観測できるかもしれない．たとえば $T'_{\mu\nu}$ が太陽のような静的な重力源であり T'_{44} のみが生き残るとし，太陽と高速粒子との間の重力を考えよう．ただし，その粒子は c に近い速度 v で動いており，エネルギー運動量テンソルの成分は $T_{11}=(v^2/c^2)T_{44}$ という関係を満たすとする．すると (3.4.2) の相互作用エネルギーは，T_{44} だけの場合よりも $1+v^2/c^2$ だけ大きくなる．光子では 2 倍になる．つまり光子が強い重力場中を動くと，ニュートン理論によるエネルギーだけに基づく予言よりも大きく曲がることになる．星の光が太陽の表面近くを通るときの屈折は，ニュートン理論での計算の 2 倍である．地球人はこの実験をおこない，屈折はニュートン理論の値のほぼ 2 倍であることを発見した．実験的証拠はまだ不完全でありすべてが無矛盾であるとは言えないが，我々の理論が予言するような現実の効果があると，強く示唆されている．

■ 静的なので振動数 $\omega=0$ としている．

■ 現在，光の屈折はクェーサーと電波望遠鏡によって，1% の精度で測られている．

我々はここで，上で議論した光の屈折，あるいは重力子のコンプトン散乱，太陽を回る水星の軌道への影響など，重力の効果の大きさを計算し，どのような実験が可能なのか検討していくこともできる．しかしおそらく，振幅ではなく重力場自体の説明を，場のラグランジアンや方程式を使って試みることが優先するだろう．

3.5 重力場のラグランジアン

ここでは我々の理論を，ラグランジアンを使って調べる．単に振幅ではなく，場自体を研究するのである．まず電気力学での状況を復習しよう．作用は

$$S_E = -\int d\tau\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right)+j^\mu A_\mu\right] \quad (3.5.1)$$

このラグランジアンから場の方程式 $A_\mu=-(1/k^2)j_\mu$ が導かれる．我々は重力で，これに対応するものを求めるのである．

第 2 項の相互作用に対応する項の形を推定するのは難しくない．$-\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ とすればよいだろう．$h_{\mu\nu}$ の微分を含む項の推定は，それほど自明ではない．添字の数も，そしてその縮約の方法もあまりにも多い．ラグランジアンの一般形を書くには，あらゆる形の微分項を記し各項の前に任意の係数を付ける．

$$a\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+b\left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+c\left(\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h^{\sigma}{}_{\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+\cdots \qquad (3.5.2)$$

係数 a, b, c, d, e, … の値を決める基準を見出ださない限り，我々の理論は完全なものとはならない．

おそらく電磁気との類推で推定できるだろう．式 (3.5.1) の一般的なラグランジアンを A で変分すると，場とカレントをつなぐ微分方程式を得る．

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu=j_\mu \qquad (3.5.3)$$

記述を簡略化するために，微分を，コンマの後に座標の添字を記して示すことにする．すると上記の方程式は

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu}-A_{\nu,\mu}{}^{,\nu}=j_\mu \qquad (3.5.4)$$

電荷の保存則は，j_μ の発散がゼロという式になる．(3.5.4) の左辺の発散は恒等的にゼロになり，場のマクスウェル方程式は電荷の保存則がなければ矛盾したものになることに注意しよう．正しい電磁場のラグランジアンでは，電荷の保存則は場の方程式の結果として導くことができる．左辺は，その発散がゼロという恒等式を満足する．

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu\mu}-A_{\nu,\mu}{}^{,\nu\mu}=0 \qquad (3.5.5)$$

同様の要請が，係数 a, b, c, d, e, … の相対的大きさを定めるのに役立つ．まず一般的なラグランジアンを書き，それを変分して場の方程式を導き，テンソル $\boldsymbol{T}$ の発散はゼロなので，それに等しいとされる場の量の発散が恒等的にゼロになるべしと要求する．これにより，係数の相対的大きさを一意的に定めることができる．この計算を具体的に行い，場の方程式が

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0 \qquad (3.5.6)$$

の場合にのみ矛盾しなくなるように，係数を調整する．

3.6 重力場の方程式

場のテンソル $h_{\mu\nu}$ の微分の積の可能な形をすべて書き下すことから始めよう．項を組み合わせるために $h_{\mu\nu}$ の対称性を使うと，各段階でかなりの単純化ができる．テンソルの添字が微分の添字と異なる場合，可能な積の形は 2 つある．

1. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\nu,\sigma}$
2. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$

等しい添字がある場合には，可能な積の形は 3 つある．

3. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}$
4. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$
5. $h^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}^{\sigma,\mu}$

この 5 つがすべて必要なわけではない．2 番目のものは 3 番目から部分積分で求まるので，省略してよい．結局，独立な項は 4 つになる．つまり，次のような作用を仮定する．

$$S = \int d\tau \Big[a h^{\mu\nu,\sigma} h_{\mu\nu,\sigma} + b h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + c h^{\mu\nu}{}_{,\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$$
$$+ d h^{\nu}{}_{\nu,\mu} h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu} + \lambda T^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \Big] \qquad (3.6.1)$$

次に，場の微分をソース・テンソル $T_{\alpha\beta}$ と関係づける微分方程式を得るために，この 4 つの項の和を $h_{\alpha\beta}$ で変分する．結果は

$$a2h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{;\sigma} + b(h_{\alpha\sigma,\beta}{}^{;\sigma} + h_{\beta\sigma,\alpha}{}^{;\sigma})$$
$$+ c(h^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} h^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}) + d2\eta_{\alpha\beta} h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{;\mu} = -\lambda T_{\alpha\beta} \qquad (3.6.2)$$

($\delta h_{\alpha\beta}$ は α と β について対称なので，その係数の対称部分のみがゼロでなければならないことに注意.) 添字 β についての各項の微分をとり，左辺の発散が恒等的にゼロであると要請すると

$$2ah^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta} + bh^{\alpha\sigma,\beta}{}_{,\sigma\beta} + bh^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\sigma\beta} + ch^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\alpha\beta}{}_{,\beta} + ch^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}{}^{,\alpha} + 2dh^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu\alpha} = 0 \qquad (3.6.3)$$

という式が求まる．同類項をまとめ，その係数をゼロとする．添字を交換したり上げ下げしたりしなければならない．すると

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta}(2a+b) &= 0 \\ h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\beta\sigma}(b+c) &= 0 \\ h^{\sigma}{}_{\sigma,\beta}{}^{,\alpha\beta}(c+2d) &= 0 \end{aligned} \qquad (3.6.4)$$

ここで $a=1/2$ というように全体のスケールを選べば

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -\frac{1}{2} \qquad (3.6.5)$$

となる．おそらくこれが，重力場の正しいラグランジアンだろう．そしてこのラグランジアンの結果として，場の方程式が得られる．

3.7 記号の定義

今後の計算では，テンソルの取り扱いがますます面倒になる．多くの添字が絡む計算に巻き込まれないように，単純化のためのトリックを開発しておこう．以下の定義が有用であるかどうかは現時点では必ずしも明らかではないが，後でその意味がわかる．

任意の 2 次のテンソルに対する「バー」演算を

$$\overline{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} X^{\sigma}{}_{\sigma} \qquad (3.7.1)$$

と定義する．$\boldsymbol{h}$ のような対称テンソルに対しては，括弧の中の 2 つの項は同じなので，この規則はもっと簡単になり

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{\sigma}{}_{\sigma} \qquad (3.7.2a)$$

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \qquad (3.7.2b)$$

対称テンソルに対しては，バー演算は自分自身の逆演算となる．

また，添字のないテンソル記号は，そのトレースを表わすとする．

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{Tr}(\boldsymbol{h}) = h^{\sigma}{}_{\sigma} \\ \bar{h}^{\sigma}{}_{\sigma} &= -h \end{aligned} \qquad (3.7.3)$$

これらの記法を使うと，場の方程式 (3.6.2) と (3.6.5) は

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{;\sigma}-2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{;\sigma}=-\lambda\bar{T}_{\mu\nu} \qquad (3.7.4)$$

と書ける．ただし (3.6.2) 全体にバー演算をほどこした．

次に，(3.7.4) の解を単純化するために，電気力学のゲージ不変性に対応するものを探そう．電気力学では場の方程式

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu}-A_{\nu}{}^{,\nu\mu}=j^{\mu} \qquad (3.7.5)$$

は，A_μ にスカラー関数 X の勾配を加えることによって得られる新しい 4-ベクトル A'_μ

$$A'_\mu=A_\mu+X_{,\mu} \qquad (3.7.6)$$

を使っても成り立つ．これに対応するテンソル場の性質は何だろうか．以下の関係が成り立つと予想される(テンソルを対称に保つよう注意を払わなければならない)．つまり (3.7.4) の左辺に

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+X_{\mu,\nu}+X_{\nu,\mu} \qquad (3.7.7)$$

という置き換えを行なっても，式の形は変わらない．証明は練習問題とする．

このゲージ不変性を使うと，電気力学でのローレンツ・ゲージのような適切なゲージを選ぶことにより，場の式を得ることが容易になる．ここでは

$$A^{\nu}{}_{,\nu}=0 \qquad (3.7.8)$$

という条件との類推で，次の条件

$$\bar{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}=0 \qquad (3.7.9)$$

を選ぶ(ローレンツ条件と呼ぶ)．これを使うと $\boldsymbol{T}$ のバーを場に関係づける方程式は

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma}=-k^2h^{\mu\nu}=-\lambda\bar{T}^{\mu\nu} \qquad (3.7.10)$$

となり，$h_{\mu\nu}=(\lambda/k^2)\bar{T}_{\mu\nu}$ と解ける．これからすぐに，ラグランジアン中の $\lambda h_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$ という項からくる発生源 $T'_{\mu\nu}$ と $\boldsymbol{h}$ と相互作用の振幅は

$$\lambda^2T'_{\mu\nu}\left[\frac{1}{k^2}\right]\bar{T}^{\mu\nu}$$

結局，これは以前，振幅を直接議論したときに得たものと同じものになる．

第4章

4.1 テンソルの階数と場の符号との関係

ラグランジアン密度を使って場についてのいくつかの有用な性質を導こう．ここで重力場に対し，これから使う結合定数と平面波の規格因子を定義する．まず

$$\lambda = \sqrt{8\pi G} \tag{4.1.1}$$

とする．ここで G は，自然単位系（$\hbar=c=1$）での通常の重力定数であり，また λ が電気力学での電子の電荷 e に対応するものになるように(その2乗ではなく)，定義に平方根を含めた．因子 $\sqrt{8\pi}$ は，多くの重要な公式から余分な因子をなくすためのものである．平面波の重力子を表わすために

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\exp(ik\cdot x) \tag{4.1.2}$$

を使う．偏極テンソル $e_{\mu\nu}$ は

$$e_{\mu\nu}\bar{e}^{\mu\nu} = 1 \tag{4.1.3}$$

というように規格化される．

重力場，物質，そして物質と重力子の結合という系全体を表わす作用の形は，

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}\int dV(h^{\mu\nu,\lambda}\bar{h}_{\mu\nu,\lambda} - 2\bar{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu}) &\quad \text{（場）} \\
-\int dV(\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}) &\quad \text{（結合項）} \quad (4.1.4) \\
+S_M &\quad \text{（物質）}
\end{aligned}
$$

この重力場のラグランジアンから，いくつかの重要な性質を導くことができる．たとえば，電気力では同種電荷は引き付け合い異種電荷は反発するのに，なぜ重力は常に引力なのかを理解することができる．この性質はラグランジアンの符号に内在したものであり，もし $S\to -S$ と変更したら，力も符号を変えることが示せる．結合定数 λ, e あるいは g は，エネルギーの補正を表わすダイアグラムには常に2乗で現われるので，その符号は関係ない．たとえば ϕ ではなく $i\phi$ を使うといった場合のように，各頂点に因子 i が掛かる場合にのみ，図4.1などのダイアグラムに相当するエネルギーの符号を変えることができる．

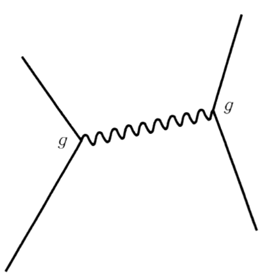


図4.1

しかし場 ϕ は，適切な平面波を表わしていなければならない．つまり，大きな箱の中の定常波がプラスのエネルギーもち，また定常波

が表わす量子論的振動子が適切に振る舞うように定義される．スカラー場の平面波は

$$\phi = a\exp(ik\cdot x) \tag{4.1.5}$$

であり，量子場の振幅 a が量子論的振動子の座標となる．$\dot{a}^2$ に比例するその振動子の運動エネルギーがプラスになるためには，理論をそれなりに作らなければならず，置き換え $\phi\to i\phi$ はできない．

電磁波の場合，同様の考察によって制限されるのは，横方向，つまり伝播方向に垂直な成分である．次のように定義されたベクトルの内積

$$A_\mu B^\mu = A_4B_4-(A_3B_3+A_2B_2+A_1B_1) \tag{4.1.6}$$

の空間部分が関係するので，そのエネルギーには負の符号が付く．クーロン力の符号は，ラグランジアンの時間成分の符号で決まる．重力波の場合も制限されるのは横成分だが，2 つの添字の縮約(あるいは偶数個の縮約)により符号は相殺し，時間成分 h_{44} の符号も電気の場合と逆になって，結局，重力は引力となる．

4.2　スカラーのエネルギー運動量テンソル

観測可能な効果を計算して，逆二乗則や，エネルギーに比例した引力が働くといった事実以外に何らかの予言をするにはまず，物質がエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ をどのように決めるのか，指定しなければならない．まず，物質はスカラー関数 ϕ によって表わされるという単純な仮定に基づいて，少し詳しい計算をしよう．後で，階数の高い関数を考える必要が出てくる．スピン 1/2 の物質は整数スピンとはかなり異なった性質をもつので，おそらくこの講義の終わり近くで考えることになるだろう．整数スピン 1 や 2 は計算が複雑だが，概念的に新しい問題は含まない．

どのように，スカラー場 ϕ からエネルギー運動量テンソルを作れるだろうか．場の理論についてのヴェンツェルの本を見ると [Went 49]，次のような手続きが書かれている．おそらくラグランジアンは，場とその微分に依存している．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \phi^i{}_{,\nu}) \tag{4.2.1}$$

エネルギー運動量テンソルの 4-4 成分はエネルギー密度を表わしているはずであり，それはハミルトニアンである．したがって，ラグランジアンからハミルトニアンを作る通常の古典的処方

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L \tag{4.2.2}$$

によって，次の規則が得られる．

$$T^\mu{}_\nu = \phi^i{}_{,\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i{}_{,\mu}}-\delta^\mu{}_\nu\mathcal{L} \tag{4.2.3}$$

この規則は一般的には正しくない．まず，これは必ずしも μ と ν について対称な表現にならない．テンソル $T_{\mu\nu}$ が対称でないと，その理

論は正常なものとはならない(たとえば，場の角運動量を定義できない)．また，その発散について次の等式

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = T^{\nu\mu}{}_{,\nu} \qquad (4.2.4)$$

が成り立たないので，エネルギー保存がおかしくなる．しかしここでのスカラー理論では，規則(4.2.3)は満足のできる対称な形になる．ラグランジアンと作用は

$$S(\text{スカラー物質}) = \frac{1}{2}\int dV(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2) \qquad (4.2.5)$$

であり，エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\nu}\phi_{,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu} \qquad (4.2.6)$$

である．

式(4.2.6)のスカラー場のエネルギー運動量テンソルを使うと，ラグランジアンの結合項は

$$-\lambda h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\lambda\left[h^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2)\right] \qquad (4.2.7)$$

となる．バーを使う我々の簡便記法では，

$$-\lambda\left[\bar{h}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}hm^2\phi^2\right] \qquad (4.2.8)$$

この結合項を使って，重力子交換による散乱振幅を計算しよう．

4.3　散乱振幅(スカラー理論)

伝播関数の形はわかっており，また各頂点での結合もラグランジアン(4.2.7)で与えられるので，図4.2に描かれた1重力子交換の散乱振幅を書くことができる．運動量表示で，場の微分を4元運動量で置き換える

$$i\phi_{,\nu} = p_\nu \qquad (4.3.1)$$

と，各頂点での結合は

$$2\lambda\left[\underline{{}^1p_\mu\,{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}({}^1p^\sigma\,{}^2p_\sigma - m^2)\right] \qquad (4.3.2)$$

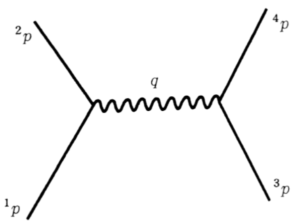


図4.2

$h_{\mu\nu}$ は対称なので適切に対称化された形を使わなければならないことに注意するため，積 $p_\mu p_\nu$ の下に下線を付けた．具体的には，

$$\underline{A_\mu B_\nu} \equiv \frac{1}{2}[A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu] \qquad (4.3.3)$$

ということである．第2の頂点に対しては，この表現のバー，つまり

$$2\lambda\left[\underline{{}^3p_\mu\,{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right] \qquad (4.3.4)$$

を使う．結局，振幅の完全な表式は

$$4\lambda^2\left[\underline{{}^3p_\mu\,{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{q^2}\left[\underline{{}^1p_\mu\,{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}({}^1p^\sigma\,{}^2p_\sigma - m^2)\right] \qquad (4.3.5)$$

これらの簡便記法(バーや下線)により，今後のもっと複雑な計算の代

数的取り扱いが単純化されるので，ここでもそれを使っておくことが役立つだろう．

我々の理論は，2 粒子の重力散乱の振幅に対する表式を与えた．これを観測可能な大きさとするには，質量を非常に大きくしなければならず，ニュートンの法則以外の効果を見るには，光速に近い速度を考えなければならない．たとえば，非常に高速($v \approx c$)の小さな物体が，太陽のような星のそばを通ったときの曲がりが計算できる．ただし星の中のすべての粒子による振幅の和を，質量 M による 1 つの振幅で置き換えることの正当化が必要である．この置き換えは近似だが，ある意味で 1 次まで正しい解答を与える．曲がりは，ニュートン理論の予言よりも $(1+v^2/c^2)$ だけ大きい．

この結果は，太陽による光の曲がりに対応するとは言えない．光子はスカラー粒子ではなく，したがってスカラー場 ϕ では表わされないからである．2 つの同種粒子の散乱の場合，振幅は交換項を含まなければならないが，星の場合は明らかに，散乱する粒子は同種ではない．

■ 交換項とは，${}^2p$ と ${}^4p$ を交換したプロセスを示す．

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に発散ゼロの項を加える可能性については，まだ議論していない．これは，質量や応力の空間的分布が異なることに対応する．この問題およびそれに関連する問題は後で詳しく議論する．スカラー粒子に対してでさえも，$T_{\mu\nu}$ の表式に真の曖昧さがあることがわかるだろう．この困難は電気力学で，光子と，電荷をもつベクトル粒子との結合を考える際にも生じるものである．

4.4 平面波の詳しい性質——コンプトン効果

物質が存在していないときの重力波の性質について調べよう．ラグランジアンを変分すると，

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda}-2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma}=0 \tag{4.4.1}$$

という式を得る．これは真空中のマクスウェル方程式に類似したものである．平面波

$$h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}\exp(iq\cdot x) \tag{4.4.2}$$

を使うと，この式は

$$q^2e_{\mu\nu}-q_\nu q^\sigma\bar{e}_{\sigma\mu}-q_\mu q^\sigma\bar{e}_{\sigma\nu}=0 \tag{4.4.3}$$

となる．我々は，$q^2\neq0$ と $q^2=0$ の場合のどちらにも関心がある．$q^2\neq0$ の場合には，まず q^2 で割り整理すると

$$e_{\mu\nu}=q_\nu\left(\frac{1}{q^2}q^\sigma\bar{e}_{\sigma\mu}\right)+q_\mu\left(\frac{1}{q^2}q^\sigma\bar{e}_{\sigma\nu}\right) \tag{4.4.4}$$

この形は，ベクトルの対称化された微分として，$e_{\mu\nu}$ を表現している．

$$e_{\mu\nu}=\chi_{\mu,\nu}+\chi_{\nu,\mu} \tag{4.4.5}$$

我々は以前，重力場のゲージ不変性のため，この形の項を追加しても物理に何も変化をもたらさないことを示した．したがって，そのような項を加えて $e_{\mu\nu}=0$ とすることが常に可能である．そこで $q^2\neq0$ の波

を「ゲージ波」と呼ぼう．それは物理的効果をもたず，常にゲージ変換で取り除くことができる．

$q^2=0$ の場合は式 (4.4.3) により

$$q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} = 0 \tag{4.4.6}$$

つまり，自由な波は「必ず」ローレンツのゲージ条件を満たす．これは，波が自由でない場合に便宜上の理由で

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{4.4.7}$$

という条件を選ぶということではない．電磁場の場合，光子が $q\cdot e=0$ でなければならないことに対応する．

運動量ベクトルが

$$q^\mu = (\omega,\omega,0,0) \tag{4.4.8}$$

となるような座標系で偏極テンソル $e_{\mu\nu}$ の具体的な形を求めよう．

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}+q_\mu\chi_\nu+q_\nu\chi_\mu \tag{4.4.9}$$

とし，$e'_{\mu\nu}$ が横方向の成分のみをもつと要求すると，一連の条件式が求まりその解は，

$$e'_{11} = -e'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad e'_{12} = e'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.4.10}$$

となる．式 (4.4.10) を得るには，式 (4.4.6) が $\bar{e}_{\mu4}=-\bar{e}_{\mu3}$ を意味し，成分 4, 1 そして 2 のみが独立であることに注意する．もし望むなら，変換 (4.4.9) を使って第 4 成分を除去することができる．たとえば $e'_{14}=e_{14}+\omega\chi_1$ なので，$\chi_1=-e_{14}/\omega$, $\chi_2=-e_{24}/\omega$ と選ぶ．また $e'_{43}=e_{43}+\omega\chi_4-\omega\chi_3$ なので，$\chi_3-\chi_4=-e_{34}/\omega$ と選ぶと，$e'_{43}=\bar{e}'_{43}=\bar{e}'_{44}-\bar{e}'_{33}=0$ となる．また $\chi_4=-e_{44}/2\omega$ と選び，$e'_{44}=e_{44}+2\omega\chi_4=0$ とする．すると $\bar{e}'_{44}$ もゼロになるので，トレース $e'_{\sigma\sigma}$ がゼロになり，したがって e'_{33} も $e'_{11}+e'_{22}$ もゼロである．したがって $e'_{\mu\nu}$ では $\mu,\nu=1$ または 2 の成分のみが残り，さらに $e'_{11}=-e'_{22}$ である．つまり，2 つの線形独立な，規格化された組合せ (4.4.10) のみが存在する．

質量 m の粒子による重力子のコンプトン散乱の振幅は，図 4.3 のダイアグラムに相当する．重力子の偏極はテンソル $e_{\mu\nu}$ によって表わされる．スカラー粒子に対しては，各頂点での運動量は，${}^1p_\mu$, $({}^1p_\nu+{}^1q_\nu)=({}^2p_\nu+{}^2q_\nu)$，そして ${}^2p_\mu$ である．これらの量を使うと，最初のダイアグラムは

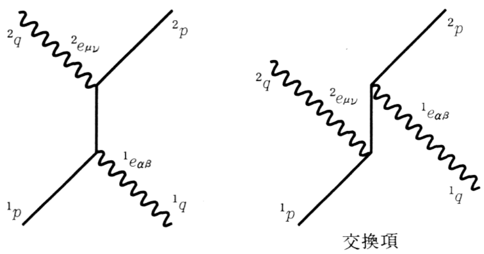


図 4.3

$$4\lambda^2\,{}^2\bar{e}^{\mu\nu}\left[{}^2p_\mu({}^2p_\nu+{}^2q_\nu)-\frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{({}^1p+{}^1q)^2-m^2}$$
$$\times{}^1\bar{e}^{\alpha\beta}\left[{}^1p_\alpha({}^1p_\beta+{}^1q_\beta)-\frac{1}{2}m^2\eta_{\alpha\beta}\right] \qquad (4.4.11)$$

となる．ここで使った伝播関数はスカラー粒子のものである．平面波とし $q^2=0$ と $q^\nu\bar{e}_{\nu\mu}=0$ を使えば，公式は単純化される．

4.5 重力子の非線形ダイアグラム

ゲージ不変性により，${}^1e_{\mu\nu}$ の ${}^1e_{\mu\nu}+{}^1q_\mu a_\nu+{}^1q_\nu a_\mu$ への置き換えは，コンプトン振幅へ何の影響ももたらさないと予想される．しかし直接代入すると，そうではないことがわかる．我々の結果は不満足であり不完全である．何が悪いのだろうか．

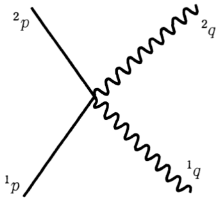


図 4.4

電子による光子のコンプトン散乱では，図 4.3 とは異なる，図 4.4 という第 3 のダイアグラムがある．これは，理論をゲージ不変にするためにラグランジアンに出現した，2 次の結合 A^2 に対応している．電気力学での状況と同様，図 4.3 の 1 対のダイアグラムを考えるとき我々は，線形化という近似を行なった．電気力学では図 4.4 のような 2 次結合による振幅の存在は，

$$e_1' = e_1+qa \qquad (4.5.1)$$

というゲージ変換が，摂動の各次数での振幅を変えないと要求することによって推定することができる．その手続きは単に，e_1 で書かれた振幅と e_1' で書かれた振幅を各次数で等しいとするだけである．同様の方法で 2 次の重力子の項の形を推測することができるかもしれないが，まだ実行はされていない．重力子の自己結合により 2 次でも事情は非常に複雑になるからである．そこで別の方法で正しい形を求めてみよう．

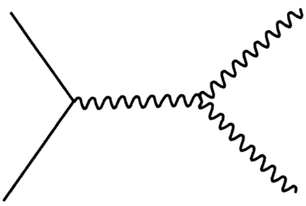


図 4.5

もっとも，この直接的な方法で 2 次の項を求めるのは興味深いと思われるので，それについてのいくつかのコメントをしておこう．

もしコンプトン散乱に，図 4.4 で表わされる振幅ばかりでなく，図 4.5 で表わされるダイアグラムも加えようとすると，おそらく，完全

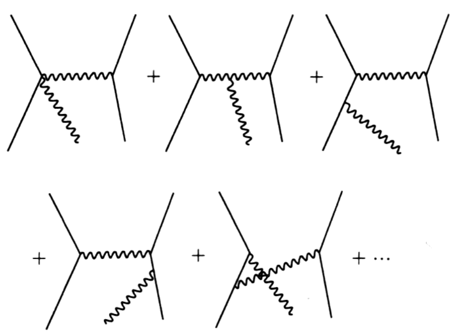


図 4.6

な理論の未知のパラメーターをすべて決定する条件は得られない．その代わり，仮想重力子のコンプトン散乱を考えると，調整可能なパラメーターの数が増えて正しい理論が求められるかもしれない．関係するダイアグラムは図 4.6 に示してあり，この合計がゲージ不変になるようにするのである．我々は実際には異なる方法でこの問題を解くのだが，こうした異なる方向から解を求めることによって我々の場の理論の詳細を学ぶのも有意義なことである．

4.6　重力に引かれている粒子の古典的運動方程式

たとえば星の周りを回る惑星の軌道など，我々の理論における古典的効果を計算するには，量子論を古典論的形式に直す必要がある．これは，作用，つまりラグランジアンの時間積分を含む経路積分に対する変分原理の結果として，古典論を表わすことによって可能になる．粒子の運動は，経路積分の最小値を与える経路である．たとえば自由粒子の運動は

■ ここでの経路積分は，1 つの経路に沿っての積分という意味であり，量子論での経路積分ではない．

$$-\int\sqrt{(ds)^2}=-\int\sqrt{dx^\mu dx_\mu}=-\int\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}}\,d\alpha \qquad (4.6.1)$$

の最小値に相当する．重力の効果を表わすには，被積分関数に何かを付け加えなければならない．古典論を与えることのできる変分原理にはいくつかあるが，最も便利な経路積分に対応するもの（量子力学的経路積分法によりクライン-ゴルドン方程式を導くことのできるもの）を使う．荷電粒子の場合，運動方程式は積分

$$-\frac{m}{2}\int d\alpha\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right)-e\int d\alpha\,A_\mu(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right) \qquad (4.6.2)$$

を変分することによって求まる．計算をすると，結果は

$$m\frac{d^2x_\mu}{d\alpha^2}=eF_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right) \qquad (4.6.3)$$

ただし $F_{\mu\nu}$ は A_μ の回転である．この方程式に $dx_\mu/d\alpha$ を掛けると，$F_{\mu\nu}$ は反対称なので

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right)$$

はゼロ，つまり

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}=\left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2$$

は定数となり，α は固有時間に比例する（m_0 をその粒子の静止質量とすれば，α を固有時間に等しくすることができる）．次に，重力中の正しい方程式が得られるように，テンソル $T_{\mu\nu}$ を適切な方法で被積分関数に加えなければならない．電気力学では，場に掛かるベクトルは単にスカラーによる位置の微分，つまり速度（$dx_\mu/d\alpha$）である．テンソル $T_{\mu\nu}$ は，このような速度 2 つによって作られるテンソルだろうと想像できる．定数係数は，44 成分がエネルギー密度を正しく表わす

ように調整する．つまり

$$T^{\mu\nu} = m_0\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right) \tag{4.6.4}$$

とする．ただし $\alpha=s=$「固有時間」．44 成分は実際，エネルギー密度になっている．2 つある $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ という因子は，その 1 つが速度によるエネルギーの増大を表わし，もう 1 つが，同時に起こるローレンツ収縮による体積の縮みを表わす．

したがって，変分すべきラグランジアン積分，つまり作用は

$$m_0\left[-\frac{1}{2}\int d\alpha\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right)-\lambda\int d\alpha\, h_{\mu\nu}(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right)\right] \tag{4.6.5}$$

となる．これをもっと簡便な形で表わすために新しいテンソル

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}+2\lambda h_{\mu\nu}(x) \tag{4.6.6}$$

を導入すると，ラグランジアン積分は，

$$m_0\left[-\frac{1}{2}\int d\alpha\, g_{\mu\nu}(x)x'^\mu x'^\nu\right] \tag{4.6.7}$$

となる．以後，α での微分を「$'$」で表わす．経路の座標 x について変分をすると，因子 x'^μ, x'^ν のそれぞれから 2 つの同じ項，そしてテンソル $g_{\mu\nu}$ から 1 つの項を得る．そして運動方程式は

$$-\frac{d}{d\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^\nu)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu = 0 \tag{4.6.8}$$

この方程式には，後で便利な他の表わし方もある．まず，2 つの速度を含む項を移項すると

$$g_{\sigma\nu}x''^\nu = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}\right]x'^\mu x'^\nu \tag{4.6.9}$$

第 2 項を 2 つに等分し，片方の添字 μ と ν を交換すると，しばしば登場するので

$$[\mu\nu,\sigma] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right] \tag{4.6.10}$$

という特別な記号で表わされている組合せを得る．この括弧(「共変接続係数」と呼ばれる)を使うと，運動方程式は

$$g_{\sigma\nu}x''^\nu = -[\mu\nu,\sigma]x'^\mu x'^\nu \tag{4.6.11}$$

積 $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$ を α で微分して運動方程式を使うとすぐ求まる結果がある．

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu) = 2g_{\mu\nu}x'^\mu x''^\nu+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}x'^\mu x'^\nu x'^\sigma \tag{4.6.12}$$

第 1 項の積 $g_{\mu\nu}x''^\nu$ を式 (4.6.9) を使って書き換え，和をとる添字を変えると，この微分は恒等的にゼロになることがわかる．つまり積 $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$ はスカラーの定数である．新しいパラメーター s を

$$g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2$$

で定義すると，この s は重力問題での，固有時間に対応するものにな

る．$ds/d\alpha$ は定数なので，それを1とし，今後 s での微分を「·」で書く．特に，

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1 \qquad (4.6.13)$$

4.7　星の周りの粒子の軌道

運動方程式は場のテンソル $h_{\mu\nu}$ を使うと((4.6.8) より)，

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}+2\lambda h_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}) = \lambda\frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\sigma} \qquad (4.7.1)$$

これを解くにはまず，重力場の適切な形が必要である．我々は，重力源が存在しない領域に関心がある．場の方程式

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda}-2\overline{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda} = -\lambda\overline{T}_{\mu\nu} \qquad (4.7.2)$$

はローレンツ・ゲージ $\overline{h}_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}=0$ を使えば，マクスウェル方程式と類似の方法で解くことができる．このゲージでは，ダランベルシアン ($\square^2=(\partial/\partial t)^2-\nabla^2$) を使うと

$$\square^2 h_{\mu\nu} = -\lambda\overline{T}_{\mu\nu} \qquad (4.7.3)$$

振動数がゼロである，時間依存性がない静的重力場の場合は，ニュートンの重力の法則が求まらなければならない．T_{44} 成分は質量に比例する．$T_{\mu\nu}$ の他の成分はゼロである．したがって場のテンソルは

$$\overline{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r},\quad \overline{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu,\mu\neq 4,4) \qquad (4.7.4)$$

バーが付いていないテンソルは，両辺に再度バーを付けて

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\overline{h}^{\sigma}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{8\pi}\dfrac{M}{r} & \mu=\nu \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \qquad (4.7.5)$$

この場のテンソルを運動方程式に代入し，次の記法を使う．

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda h_{44} \\ \psi &= 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11} \end{aligned} \qquad (4.7.6)$$

今の場合は $\phi=\psi=-2MG/r$ だが，この関係が成り立たない場合の解を求める機会が後であるので ϕ と ψ の区別を保つ．ただし ϕ と ψ は r のみの関数と仮定する．

軌道を求める手続きは，ニュートン場での方程式を解く通常の方法に類似している．方程式を空間座標部分と時間座標部分に分離し，時間とパラメーター α を消去して動径座標と角座標を結び付ける微分方程式を求める．4次元での方程式 (4.7.1) から出発する．空間成分 ($\nu=3,2,1$) は，

$$\frac{d}{ds}\left(-\dot{x}+\psi\dot{x}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{t}^2+\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)\right] \qquad (4.7.7)$$

という形の方程式に従って振る舞う．時間の方程式は

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{t}+\phi\dot{t}\right) = 0 \qquad (4.7.8)$$

式 (4.6.13) により運動の積分

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1 \qquad (4.7.9)$$

が求まるが，これは今の場合は次の関係式となる．

$$\dot{t}^2(1+\phi) - (1-\psi)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 1 \qquad (4.7.10)$$

時間の方程式 (4.7.8) は，K を定数(エネルギーに比例)として

$$(1+\phi)\frac{dt}{ds} = K \qquad (4.7.11)$$

となる．これは空間座標の式 (4.7.7) から微分 (dt/ds) を消去するのに使える．ϕ と ψ は r にしかし依存しないので，式 (4.7.7) の右辺は x に比例する．したがって

■(4.7.7)の x を y にした式も使う．

$$\frac{d}{ds}\Big((1-\psi)(\dot{x}y+\dot{y}x)\Big) = 0$$

もし運動が完全に $z=0$ 平面内で起きているとし xy 平面内の極座標 r, θ を使うと，角運動量に関係する運動の定数 L を得る．

$$(1-\psi)r^2\dot{\theta} = L \qquad (4.7.12)$$

すると動径方向の運動は式 (4.7.10) より，

$$\frac{K^2}{1+\phi} - (1-\psi)(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2) = 1 \qquad (4.7.13)$$

(dr/ds) を $(d\theta/ds)$ で割ることによって微分 $(dr/d\theta)$ に変えると，軌道に対する微分方程式が求まる．

$$\frac{K^2}{1+\phi} - \frac{L^2}{(1-\psi)r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = 1 \qquad (4.7.14)$$

通常の変数変換 $u=1/r$ をすれば，ニュートン解に対する小さな摂動によって扱うことのできる方程式が得られる．

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2}{1+\phi} - 1\right)\frac{1-\psi}{L^2} \qquad (4.7.15)$$

今の場合，$\phi=\psi=-2MG/r=-2MGu$ であると考えられる．非相対論的運動の場合 K は 1 に近く，ϕ が小さいとすれば $K^2/(1+\phi)-1=K^2-1+2MGu$ である．したがって ϕ が小さいという極限では (4.7.15) の右辺は単に，$L^{-2}(K^2-1+2MGu)$ となる．これは，右辺が $(E+2MGu)L^{-2}$ であるニュートン理論と同じである(E はエネルギー)．高次の項が無視できない相対論的場合には補正があるが，それは次章で議論する．

第 5 章

5.1 惑星の軌道と水星の歳差運動

より精密な理論を構築していくにつれ，判定基準として理論の予測を，より厳密に調べる必要がある．我々は，静的な極限では，全エネルギーが関係するニュートン理論になり，星の場の中を動く光子の「落下」も正しく予測すると思われる場の理論を得た．一方，この理論を否定するかもしれない実験は，水星の軌道の近日点移動に関するものである．まず，惑星軌道の計算をしてみよう．次の方程式から始める．

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\left(\frac{K^2-1-\phi}{1+\phi}\right)\left(\frac{1-\varphi}{L^2}\right)$$
$$u=\frac{1}{r}\,;\quad K=(1+\phi)\frac{dt}{ds}\,;\quad L=(1-\varphi)r^2\frac{d\theta}{ds} \tag{5.1.1}$$

ここで ϕ と φ はテンソル $h_{\mu\nu}$ の対角成分を表わし，$\phi=2\lambda h_{44}$ また $\varphi=2\lambda_{ii}\,(i=1,2,3)$ である．そしてここまで構築してきた我々の理論によれば，$\phi=\varphi=-GM/r=-2GMu$ である．しかし，すぐにわかるようにこの理論は正しくなく，後で計算をすべてやり直すのを避けるため，次のように書いておく．

$$\begin{aligned}\phi&=\alpha(-2MGu)+a(-2MGu)^2+\cdots\\ \varphi&=\beta(-2MGu)+b(-2MGu)^2+\cdots\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

これまでの理論での結果を得るには，$a=b=0$，そして $\alpha=\beta=1$ としなければばならない．スカラー理論の場合は $\alpha=\beta=1$ で $\phi=-GM/r$ である．ポテンシャル ϕ は，この問題での自然な単位 mc^2 で表わすと 1 よりも非常に小さく，因子 $1/(1+\phi)$ を ϕ の級数として展開することができる．すると方程式は

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\frac{1}{L^2}(K^2-1-\phi)(1-\phi+\phi^2\cdots)(1-\varphi) \tag{5.1.3}$$

となる．ここでこの式の右辺を，変数 u で展開しよう．小さなポテンシャル $2GMu$ と K^2-1 での展開の 1 次と 2 次の項だけをとると

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=A+Bu+Cu^2+\cdots \tag{5.1.4}$$

ただし

$$A=\frac{1}{L^2}(K^2-1)\,;$$

$$B = \frac{2GM}{L^2}[(K^2-1)(\alpha+\beta)+\alpha];$$

$$C = \frac{1}{L^2}(2MG)^2[K^2\alpha^2+K^2\alpha\beta-K^2a-(K^2-1)b]$$

ここでθで微分する．共通の因子で割ると，方程式は，簡単な摂動解を求められる形になる．

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{1}{2}B+Cu+\cdots \qquad (5.1.5)$$

この方程式は$C=0$の場合は，ニュートン理論の単純な円錐曲線の解をもつ．変数uはθの関数として，点$(1/2)B$の回りで調和振動をする．楕円軌道の場合，振動数は1であり，動径座標rは，θが2π変化すると元の値に戻る．運動は正確に周期的である．Cがゼロでないときは，振動数は$\omega=\sqrt{1-C}$である．周期は長くなり，近日点は角度が$T=2\pi/\omega=2\pi(1+C/2+\cdots)$変化するたびに現われる．$C\ll 1$であり，角度$\pi C$は一周期ごとの近日点の歳差となる．

非相対論的な惑星では，歳差の値は容易に求まる．非相対論的極限とは，全エネルギーKが(自然な単位mc^2で)1に近い場合である．この場合，式(5.1.5)が厳密にニュートンの方程式になるべきであり，それは容易に示せる．我々の理論が正しい非相対論的極限をもつことは，正しい歳差を導くことよりも重要である．$K^2-1\approx 0$のときは，1周期当たりの歳差は

$$\pi C = (\alpha^2-a+\alpha\beta)4\pi M^2G^2L^{-2} \qquad (5.1.6)$$

これまでの理論では$\alpha=\beta=1$，$a=0$なので，水星に対しては答は(地球時間で)1世紀当たり57角度秒となる．他の惑星に対してはこの値はずっと小さく，地球の場合は1世紀当たり4角度秒ほどになる．実際の歳差は観測によれば5270角度秒/世紀である．しかしこのほとんどは，他の惑星の影響による摂動として説明できる．(純粋のニュートン理論を使った)補正を正確に行なうと，観測値は41±2秒となる．我々の理論の結果は明らかに，4/3ほど大き過ぎる．

■これは水星の場合の値である．

しかし結果はかなり近いので，我々の理論を捨て去る前に，観測結果と計算を注意深く再検討し，この違いが本当なのかを確認してみよう．実際，計算は何度も繰り返され，41±2秒という値は変わらなかった．実体的な説明が可能かを考えてみよう．もし水星の内側に未発見の惑星があったり，太陽が四重極的変形をもっていたら(つまりもっと扁平だったら)，それによる歳差もあるだろう．しかし実際にどれだけの変形が必要か評価すると，現実的でない結果が出てくる．十分な大きさの四重極をもつには，太陽の回転速度は小さ過ぎる．内側に惑星があるという説も，やはり満足のいくものではない．つまり，我々の理論は正しくないと結論せざるをえない．

何が悪いのかという議論を進める前に，以上の軌道計算の方法を使って，太陽の近くを通り過ぎる高速粒子の屈曲について定量的な結果を得てみよう．相対論的極限では$K^2\gg 1$であり，全エネルギーは静

止エネルギーよりもはるかに大きい．運動量は $p=\sqrt{K^2-1}$ である．極限 $K\gg 1$ でも方程式はニュートンの理論のものと形は同じになるが，ポテンシャルは $(\beta+\alpha)$ 倍になる．$\beta=\alpha$ なので，予測値は一般的に 2 倍になる．

数値的には，太陽の表面をかする超高速の粒子（$v=c$）は 1.75 秒曲がる．太陽の横を通過する他の星からの光の屈曲が測定され，結果はこの値に非常に近かった．観測は原理的には単純だが，遠近にかかわらず太陽が上空にあるときに星を観測するのはかなり難しい．空の正確な写真を撮り，それと皆既日食中の写真と比較する．太陽から離れた星が重なるように 2 枚の写真を重ね，太陽に近づくにつれて星の位置がずれるかを見る．データの分析は非常に面倒だが，2 回のこのような実験の結果は，太陽をかする光の屈曲が 2.01 秒あるいは 1.70 秒というものであった．つまり 1.75 秒という予測は，観測とほぼ一致している．

5.2 重力場中での時間の遅れ

惑星軌道の歳差が 4/3 倍ほど過大評価されることを除けば，現時点で我々は，観測と合致するように見える理論を手にしている．金星の理論家としては，未知の摂動の正体についての論争が続き，一方ではより精密な測定がなされている間は，検証可能な新しい効果を発見し，あるいは理論中の隠された矛盾を見つけるため，現在手にしている理論を追求していくのが賢いとも考えられる．

電磁場中と重力場中の粒子の運動方程式を比較すると，重力での方程式は，定性的に異なる新しい特徴をもっている．つまりポテンシャルの勾配ばかりでなく，ポテンシャル自体が式の中に登場する．

$$\text{電磁場}\quad \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\frac{e}{m_0}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\frac{dx^\nu}{ds}$$

$$\text{重力場}\quad \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \qquad (5.2.1)$$

微分方程式自体は密接に関連しているが，その解釈に差が出る．たとえば定ポテンシャル中とゼロ・ポテンシャル中とでは，いずれも加速度はゼロだが，同じ結果にはならない．宇宙では，遠方の銀河のポテンシャルへの寄与は，広い範囲にわたってほとんど一定なので，この違いが問題になる．

この新しい関係を最大限に簡潔かつ一般的に扱うため，ラグランジアンと変分原理による定式化に戻ろう．空間のある領域で重力テンソル $g_{\mu\nu}$ が座標に依存せず，次のような値をとると仮定しよう．

$$g_{44} = 1+\epsilon\ ; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad (5.2.2)$$

遠方の物体のためポテンシャルは負 $\epsilon<0$ だと考える．ラグランジアンは，

$$-\frac{m_0}{2}\int d\alpha\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha}$$

$$= -\frac{m_0}{2}\int d\alpha\left[(1+\epsilon)\left(\frac{dt}{d\alpha}\right)^2-\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2-\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2\right] \tag{5.2.3}$$

単なる置き換え $t'=t\sqrt{1+\epsilon}$ だけで，この項がもとの形に戻るのは明らかだろう．つまり定数ポテンシャルの効果は時間スケールの変化であり，重力ポテンシャルが小さい領域ではプロセスの進行が遅くなることを意味するように思える．

しかし，自由粒子のみによる議論は意味がない．何も起こらないプロセスがゆっくり進むとは言えないからである．相互作用する粒子の振る舞いを調べなければならない．そこで，スカラー物質に対する我々の理論を使おう．作用積分は

$$\frac{1}{2}\int d^4x(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma}-m^2\phi^2)-\lambda\int d^4x\, h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{5.2.4}$$

ただし

$$T^{\mu\nu} = \phi^{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}-\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{5.2.4$'$}$$

空間微分の項と時間微分の項を分離し，また体積要素 d^4x 中の時間も分けて書く．補正 ϵ は 1 よりも小さいとして展開が許されると仮定すると，作用は

$$\frac{1}{2}\int d^3x\, dt\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2(1-\epsilon/2)-(\nabla\phi)^2(1+\epsilon/2)-m^2\phi^2(1+\epsilon/2)\right] \tag{5.2.5}$$

となる．ここでも $dt'=dt\sqrt{1+\epsilon}\approx dt(1+\epsilon/2)$ とすると，作用はもとの形に戻る．明らかに，ϕ で表わされるスカラー粒子に対して時間の遅れが起こっている．全ラグランジアンの具体的な形にかかわらず，あらゆる相互作用に対して時間の遅れが起きることを示すこともできる．$T^{\mu\nu}$ に対するヴェンツェルの公式 (5.2.4$'$) を使って議論する．重力相互作用は，ラグランジアンの他の部分から分離することができ

$$\mathcal{L}(\text{total}) = \mathcal{L}_0-\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \tag{5.2.6}$$

ここで公式 (5.2.4$'$) と，(5.2.2) の $g_{\mu\nu}$ つまり $\lambda h_{44}=\epsilon/2$ を使うと，全ラグランジアンは $\mathcal{L}-(\epsilon/2)T_{44}$，つまり

$$\mathcal{L}(\text{total}) = \mathcal{L}(1+\epsilon/2)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\phi_{,t}}\phi_{,t}(\epsilon/2) \tag{5.2.7}$$

となる．全ラグランジアン(一定の重力ポテンシャルを含む)は場 ϕ とその微分のみを含むと仮定しよう．すると変数 t' を使って書いた作用積分は，

$$\phi_{,t'} = (1+\epsilon)^{-1/2}\phi_{,t}$$

$$\text{作用} = \int d^3x(1+\epsilon)^{1/2}dt\,\mathcal{L}[(1+\epsilon)^{-1/2}\phi_{,t},\phi,\phi_{,x}]$$

なので，少なくとも ϵ の 1 次のオーダーでは

$$作用 = \int d^3x\, dt'\, \mathcal{L}(\phi_{,t'}, \phi, \phi_{,x}) \qquad (5.2.8)$$

となる．

結局，時間微分 ϕ,t を含むラグランジアンの各項は因子 $\sqrt{1+\epsilon}$ をもつので，置き換え $t'=t\sqrt{1+\epsilon}$ が，一定の重力場の効果を正確に再現することがわかる．したがって時間の遅れを除けばすべての物理は不変となる．

重力ポテンシャルがマイナスなので，星のような重い物体の近くに来れば来るほど時計の動きは遅くなる．では，$\epsilon=-2GM/r$ だとすれば，$1+\epsilon$ が負になる可能性はあるのかと疑問に感じるかもしれない．しかし G は非常に小さいので，実際にはこの問題は起こらない．太陽程度の質量をもつ星の場合，その質量が半径1.5キロメートルの範囲内に集中している場合にのみ $\epsilon=-1$ となれる．しかし $\epsilon<-1$ となる数学的な可能性は我々の理論の中にあり，より精密な理論でもこの問題が生じることを，後で議論することになる．

いずれにせよ，重力理論の新しい予言を得た．重力ポテンシャルが小さい領域では，時計の動きは遅くなる．地球人はこの予言を確かめるために，地球の表面近くで光子を24メートルほど落とすという実験を行なった．光子はてっぺんで放出され地表面で吸収された．この実験では，メスバウアーが発見した，結晶中の原子核の遷移によって発生する幅が極めて狭いスペクトル線が使われた．落下による振動数の僅かな変化(10^{15}分の1)は，人工的なドップラーシフトにより相殺された．結晶の相対速度の関数として吸収率を測り，それから振動数のずれが決定され，結果は，約10%という実験誤差の範囲内で理論の予言に一致した．この実験でゆっくりと動いた時計とは，決まった振動数をもつ光子を発生させる原子核過程である．てっぺんと地表面の時計の振動数の違いは，$(\Delta\omega/\omega)=(\epsilon/2)=$重力ポテンシャルの差$\div c^2$であった．

この振動数のずれを予言するには，実際には，我々の重力理論を必要とはしない．エトヴェシュの実験結果から推定されることである．重力(そしてポテンシャル)はエネルギー量に比例する．したがって振動数のずれは，光子のエネルギーがもつ重力エネルギーに相当する．M を原子核の基底状態の質量，E_0 をその励起エネルギーだとすれば，原子核実験から，励起した原子核の質量は $M+E_0/c^2$ である．したがってエトヴェシュによれば，励起した原子核は $(E_0/c^2)g$ だけ重い．それを高さ h だけ持ち上げれば，高さ0での基底状態と比べて，そのエネルギーは $E_0+(E_0/c^2)gh+Mgh$ だけ大きい．しかし基底状態のときは，そのエネルギーは下にある原子核よりも Mgh しか大きくない．そして光子のエネルギーは $E=\hbar\omega$ なので，放出された光子の振動数は $\omega=\omega_0[1+gh/c^2]$ となる．つまりエネルギー保存則から，振動数のずれが要求されることがわかる．もし振動数のずれがなかったら，この原子核の遷移を使って永久機関さえ作れる．上にある原子核

を，エネルギー E_0 の光子で励起する．その励起原子核を下げると，$(M+E_0/c^2)gh$ だけの力学エネルギーが得られる．基底状態の原子核を持ち上げるには Mgh のエネルギーしかいらないので，これを繰り返すことによって 1 サイクルで $(E_0/c^2)gh$ のエネルギーが得られることになってしまう．つまり，我々の理論はつじつまが合っている．そしてエネルギー保存則によって要求される振動数のずれは，重力ポテンシャルが小さければすべてのプロセスがゆっくり進行するという，一般的な性質だとも予想される．

特殊相対論の「双子のパラドックス」のような問題はここにはない．山の上の人間は我々よりも早く歳をとる．彼は，我々よりも速く動くだろう．また彼から見れば，我々はゆっくりと動いている．互いに相手の動きが遅く見えるという，高速運動しているときの時間の遅れとは違う．しかし，たとえば死海に引っ越して寿命を延ばそうとしても意味はない．歳をとる速さの変化は，きわめて微小である．しかし地球のような物体の年令を考えるときは，注意が必要かもしれない．地球中心の年令は，地表よりも 1 日か 2 日は若いからである．

5.3　時間の遅れの宇宙的効果，マッハ原理

以前，宇宙はおおまかに，球対称に分布した物質として近似でき，重力ポテンシャルはおそらく，重力エネルギーが中心近くの粒子の静止エネルギーに等しくなる程度の大きさだろうと指摘した．もしそうだとすれば，そして我々の時間の遅れの公式が正しいとすれば，宇宙の中心では時間が進まないので，そこでは現実のプロセスは止まってしまうことになる．この他にも，物理的に受け入れ難い予測がある．宇宙の端近くでは物質が，より速く相互作用すると予想されるので，遠方の銀河からの光は青方遷移することになる．しかし実際には，より少ない振動数へと赤方遷移していることがわかっている．したがって，時間の遅れに関する我々の公式は明らかに，宇宙のモデルと関係させてさらに議論しなければならない．以下の議論は単に定性的なものであり，この問題についてのさらなる考察を刺激することのみを意図したものである．

我々の単純な公式に対する補正は，テンソル $h_{\mu\nu}$ の空間成分からくるかもしれない．我々は h_{44} のみを考えてきた．もし h_{33}，h_{22} そして h_{11} を含めたとすれば，単に時間の遅ればかりでなく，空間軸方向の何らかの収縮が導かれ，困難が解決されるかもしれない．もう 1 つの可能性は，時間の遅れの公式に現われる 1 が間違っているということだ．我々は，ポテンシャルの差 ϕ が 1 よりもずっと小さいときにのみ適用される公式を書いた．定数 1 は遠方の銀河の規格化された寄与を表わすと考えることもできる．つまり，粒子の全エネルギーに対する重力補正は，慣性への補正であると推定したことになる．そこで，もしかしたら粒子は内在的な慣性はもたず，すべての慣性は宇宙の他

の部分との重力相互作用の和であると考えるのも，概念的に単純な推論であろう．しかしすぐに，定量的な困難に遭遇する．太陽の近くでは惑星の全ポテンシャル・エネルギーは，太陽のポテンシャルと，他の物質からくるほぼ一定の寄与の和である，と仮定しよう．

$$\phi = \phi(\text{太陽}) + \phi(\text{物質}) \qquad (5.3.1)$$

補正 ϕ(太陽) は符号が逆でなければならないので，ϕ(物質) を 1 に対応させることはできない．

この単純な試みはうまくいかないように見えるが，さらに詳しく議論するのも価値があるだろう．慣性が遠方の物質との相互作用効果を表わしているという考え方は，19 世紀に最初にエルンスト・マッハが展開し，そしてアインシュタインが重力理論を構築するときに頭にあった，強力なアイデアの一つであった．

マッハは，「空間」に対する絶対的な加速という概念は意味がなく，その代わりに，古典物理学での通常の絶対的加速を，遠方の銀河に対する加速と言い換えるべきであると考えた．同様に，回転という概念も，何か他のものに対する回転でなければならず，「絶対的回転」も意味のない概念であるとした．この主張をマッハ原理と呼ぶ．この原理が，意味のある物理的結論を導く可能性もある．一定の相対速度をもつ座標系をつなぐ相対性原理が，ホイヘンスにビリアード玉の衝突の法則を導く手段を与えたのと同様である．大きさは同じだが方向が逆のビリアードの玉は，正面衝突すると運動量が逆転する．ホイヘンスは，この実験が，岸に対して等速運動している船上で行なわれることを想像した．そして相対性原理を使うことによって，彼は，任意の初期速度をもつビリアード玉の衝突について，正しい法則に到達した．

通常の力学では，加速のない直線運動が力のないときの「自然」の動きであると仮定されているので，マッハ原理は，力学法則を根本的に変えるかもしれない．加速が他の物体に相対的な運動として定義されると，「加速がない」ときの粒子の経路は，空間中の他の物質の分布に依存することになり，また，空間中の他の物体の分布が変化すると，物体間の力の定義も変わってしまう．

5.4　量子力学でのマッハ原理

量子論では直線的経路という限定はできないので，量子論におけるマッハ原理は，新しい意味をもつことになる．量子論でのマッハ原理は，時間発展に関する言明を含む．

マッハは，粒子は自分が加速していることを，どのようにして知るかという問題を考えていた．彼は，銀河の影響からだ，銀河に対する加速は力を必要とするからだと考えた．しかし量子力学の出現により，新しい，「絶対」という概念が定義可能となった．長さや時間の絶対的な尺度である．立方体中のゼロ・エネルギーの 10^{24} 個の水素原子は，決まった大きさをもつ．NH_3 分子は決まった時間で，サイクル

間を動く．真空中で衝突する 2 つの光子は，その波長が $2\pi\,3.68\times 10^{-11}$ cm 以下になって初めて，1 対の電子を生み出す．光子は，電子対を生み出すかどうかを決めるときに，絶対的尺度でその波長をどのようにして「知る」のだろうか．空間の各部分が，大きさ(そして時間)の尺度を含んでいなければならない．

マッハ原理の哲学を受け入れると，以上のことはナンセンスということになる．大きさは，それと比較するものがなければ意味がない．空間の各点での時間の尺度を決定するのは，銀河の影響でなければならない．たとえば，宇宙の大きさに対するコンプトン波長は，宇宙の中にある銀河の数に依存する．その一部がなくなったら，尺度も変わるかもしれない．

したがって我々は，時間の自然な尺度，たとえば $\hbar/mc^2$ の大きさ(あるいは他の素粒子についての定数の組合せ——それらは皆，何らかの長さの単位に比例すると考える)は，遠方の銀河によって決定されると仮定する．すると慣性系も，銀河によって自動的に決定されることを示そう．銀河に相対的な加速に対する慣性という現象は，「長さを決定する原則」が受け入れられれば理解できる．したがってマッハ原理は，各点での長さと時間の基本的単位が，銀河の影響の結果であるという言明と等価となる．

量子力学では，「静止」しているとされる粒子は，時間発展因子 $\exp(-imc^2t/\hbar)$ をもつ．慣性の法則は，時間の尺度が座標 x に依存しないという言明になる．古典的軌跡は，位相一定の面への法線に沿って進む．2 次元では図 5.1 のように，位相一定の線は時間軸に垂直になる．

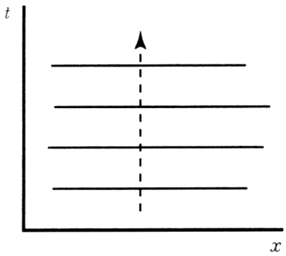


図 5.1

空間の各点で時間の尺度が異なれば，位相一定の線は曲線となる．そして対応する古典軌道は曲がり，図 5.2 に示されているように，尺度が小さい領域へ向かう加速度運動となる．星はこのように時間を密集させるので，加速を生み出すのである．量子力学では，平面波解は，位相一定の線が平行なときに存在する．もしそうでなければ，波束は位相の勾配の方向へ向かう．もし，主に遠方の銀河が尺度を決めており，近傍には星がないとすれば，尺度 $\hbar/mc^2$ は隣接した点 1 と 2 でほぼ等しい．点 1 と 2 はすべての銀河から，ほとんど等しい距離にあるからである．したがって，点 1 と 2 での自然な振動数(位相一定の線の間隔)は，実際上等しくなる．もしある粒子が点 1 と 2 で，初期位相が等しいとすれば，その後もずっとそうであり続けるだろう．つまり静止し，加速されない(厳密に言えば，長い波束が静止する)．初期位相が異なると軌道は傾くが，その傾きは時間に依存しない．つまり等速である．加速が起きないのは，空間内のすべての点で，時間の自然な尺度が等しいことの結果である．この一定性は，銀河が自然な尺度を決めているとすれば理解される．影響を与える銀河分布のスケール(宇宙の大きさ)と比較して非常に小さな領域では，尺度の変化は期待されないからである．

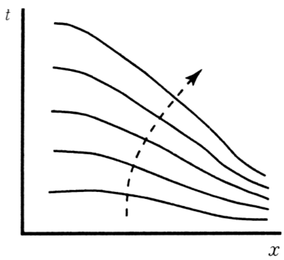


図 5.2

長さの「自然な」スケールが，ある意味で宇宙論から現われるのかを示すために，ここで，数値的な符合を指摘しておこう．この符合は「理論」が関係するものではない．結局は詳しい理論によって予言されるかもしれない関係を説明するだけのことである．まず，宇宙にとって「自然」な時間の尺度は，静止状態の粒子に対する線素

$$(ds)^2 = g_{44}(dt)^2 \tag{5.4.1}$$

であるとしよう．t 座標の単位は，R を宇宙の半径として (R/c) であり，また原子単位は ds で定義されるとする．$g_{\mu\nu}$ の絶対的大きさを真面目に考えるのである．ds の一単位が基本的な長さになる．具体的にはどの長さにしたらよいだろうか．すべてが互いに比例しているが，ここでは陽子のコンプトン波長 $\hbar/Mc$ をとる．つまり $s=1$ が，陽子の波動関数の振動一回に対応する．また $t=1$ は，宇宙の大きさのスケールである．

次に，各陽子による g_{44} への寄与は，単に $1/r$ とする．（r は座標の単位，宇宙の半径を基準に表わす．）すると，N_0 個の陽子をもち，距離は $R=1$ の程度である典型的な遠方の銀河は，g_{44} に N_0 のオーダーの寄与をする．すると n 個の陽子をもつ，距離 r にある星の近傍では，線素は

$$(ds)^2 = \left(N_0+\frac{n}{r}\right)(dt)^2 \tag{5.4.2}$$

T が宇宙の年令だとすると，陽子時間とは数値的に，$(\hbar/M_pc^2)\approx T/\sqrt{N_0}$ という関係になる．これをすでに述べた別の符合，$2M_{\mathrm{univ}}\,G/R\approx 1$ と組合せ，センチメートルや秒といった任意の単位系で表わすと，結果は

$$(ds)^2 = \left(1+\frac{2mG}{r}\right)(c\,dt)^2 \tag{5.4.3}$$

となる．ただし m は星の質量で，ほぼ nM_p に等しい．符号がマイナスではなくプラスになるという大欠陥を除いては，「正しい」線素が求まった．純粋に宇宙論的数を扱っただけで，正しいスケールが求まったことになる．

おそらくこの符合には，深い意味はないだろう．誤りの一つは，各陽子からの寄与 $1/r$ を仮定したことである．しかし $1/r$ 依存性は，近傍の粒子による全エネルギーへの補正に対しては正しいが，おそらく遠方の銀河については正しくないだろう．もう一つの重大な誤りは，テンソル $h_{\mu\nu}$ の他の項，たとえば h_{11} の効果は考えなかったことである．それでもこの計算は，重力の理論が必然的に，時間や慣性が関係する考察に結び付くことを教えている．遠方の粒子の数で表わされる相互作用と，陽子などの物体の慣性との関係をかいま見ることができる．いずれにしろ，$g_{\mu\nu}$ の絶対的な大きさを真面目に考えることに意味があるかもしれない．平坦な空間では $g_{44}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=\xi$ だが，ξ は単に 1 とすべきではない，何らかの意味がある数かもしれない．

5.5 重力場の自己エネルギー

それほど空想的ではない，より精密な問題に戻ろう．

我々の場の理論の修正を考える際に，理論の整合性のことは考えてこなかった．我々は場の項，物質の項，そして結合項を含む全ラグランジアンを書き下した．エネルギー運動量テンソルの発散が恒等的にゼロになるように調整することで，場の方程式に到達した．しかしこのテンソルは重力場自体のエネルギーを含んでいないので，この手続きは明らかに誤りである．つまり物質のエネルギーが保存されないので，我々の理論は物理的に不満足である．

この理論的欠陥を矯正するために，

$$(T^{\mu\nu}+\chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \tag{5.5.1}$$

となり，同時に場の自己エネルギーを正しく考慮することになるような，以前のテンソル $T^{\mu\nu}$ に加えるべき新しいテンソルを探してみよう．どのようにしてこの項を見つけたらよいだろうか．正しい全テンソルを，ヴェンツェルの公式と完全なラグランジアンを使って作ることもできるだろう．しかしその結果は非対称なテンソルとなり，それを対称化し計算すると，水星の近日点の移動の計算値は悪くなる．これは，理論物理における一つの経験則である．つまり，最小作用の原理といった何らかの変分原理から作ったのではない理論は，結局，困難や矛盾に突き当たる．

我々は，複雑さが増す順番にさまざまな理論を試してみるという，通常の手順にのっとった別の方法を取る．物理的には，非線形効果を記述しようとするのである．重力場はエネルギーによって作り出され，その場自体も場の発生源となる．そのような非線形性によって水星の近日点移動の小さなずれが説明できたら，素晴らしいだろう．我々は，場の方程式が何らかの作用の変分から出てくるという立場を変えず，式 (5.5.1) が満たされる $\chi^{\mu\nu}$ を得て運動方程式

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma}-2\bar{h}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{,\nu\sigma} = -\lambda(\bar{T}^{\mu\nu}+\bar{\chi}^{\mu\nu}) \tag{5.5.2}$$

を導くには，どのような項をラグランジアンに加えなければならないのかを考える．もちろん，少なくともその一部は場の 2 乗，つまりポテンシャルの勾配の 2 乗に比例していなければならない．したがっておそらく $\chi^{\mu\nu}$ は，$h^{\mu\sigma}{}_{,\lambda}h^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}$ といったような，2 つの h と 2 つの微分を含む項の和である．

場の方程式は，最小作用の原理のような変分原理から求まるとする．積を変分すると h の数が減るので，変分されるラグランジアンは，$h_{\mu\nu}$ の 3 次の項を必要とする．それを F^3 と呼ぼう．この F^3 の変分が $\chi^{\mu\nu}$ という項を導くようにしたい．

$$\frac{\delta F^3}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda\chi^{\mu\nu} \tag{5.5.3}$$

F^3 の代数的性質は，3 つの h を含み，2 つの微分をもつものでなけれ

ばならない．F^3 の典型的な形は

$$F^3 = ah_{\mu\nu}h^{\mu\sigma,\lambda}h_{\sigma\lambda}{}^{,\nu}+\cdots \tag{5.5.4}$$

のようなものであろう．このような積をすべて書くと，24 項あることがわかる．ある種の項は部分積分を 2 回すると他の項の組合せになるので，項の数を減らすことができ，結局，独立の項は 18 になる．したがって $\chi^{\mu\nu}$ は，h と 18 個の独立な定数により書かれる．

次にすべきことは明らかだ．つまり

$$(T^{\mu\nu}+\chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0 \tag{5.5.5}$$

という式を要求し，それらの定数を決める．この式の結果は，18 個の定数に対する，18 よりも多くの方程式になる．しかしそれらはつじつまが合っており，18 個の定数は一意的に決まる．そして我々は，重力場のエネルギーを $h_{\mu\nu}$ の 2 次まで正しく取り入れた，改良された理論を手に入れたことになる．

■ 18 個の定数については，(6.1.13)を参照.

第 6 章

6.1 エネルギー運動量テンソルの2次の項

我々の理論は，重力場 $h_{\mu\nu}$ を，エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に関係づける方程式を書き下したという意味で，1次である．

$$\overline{h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda}-2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda}}=-\lambda T_{\mu\nu} \qquad (6.1.1)$$

ここで $T_{\mu\nu}$ は重力によって影響を受けず，重力場のエネルギー自体は重力場の発生源にはならないかのように考えて，物質のみで表わした．含めるべき，物質への重力の影響は，第3の物体があるときに，二つの物体1と2を一緒にしたら何が起こるかを考えることによって，説明できるかもしれない．仕事の一部は，第3の物体の加熱に使われて，物体1と2，およびそれらが作り出す場を考えるだけでは，エネルギーは保存しないかもしれない．つまり，部分系を考えるだけでは，エネルギーは保存しないかもしれない．たとえば図6.1の点線で囲まれている部分は，(a)と(b)で同じ重さではないかもしれない．場のエネルギーによる非線形効果については，概念的には，もう少しよくわかっている．つまり我々は第一近似として，物体を発生源として場を計算した．そこで次の近似は，第一近似として求めた場を発生源に含め，自己無撞着な解に近づくことである．

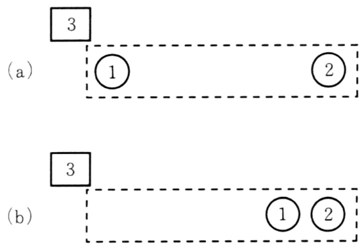


図6.1

ラグランジアンの無視された部分から導かれる項を加えることによって，以前のエネルギー運動量テンソルから，新しいエネルギー運動量テンソルを求めよう．つまり，無視された部分を F^3 と書き，変分により

$$\begin{aligned} {}^{\mathrm{new}}T^{\mu\nu} &= {}^{\mathrm{old}}T^{\mu\nu}+\chi^{\mu\nu} \\ \lambda\chi^{\mu\nu} &= \frac{\delta F^3[h]}{\delta h_{\mu\nu}} \end{aligned} \qquad (6.1.2)$$

とする．そうすれば，少なくとも $h_{\mu\nu}$ についての高いオーダーまでは問題が解決できるかもしれない．

我々は，${}^{\mathrm{old}}T^{\mu\nu}\equiv{}^{\circ}T^{\mu\nu}$ が，エネルギー保存則 ${}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ を満たさないという問題を解決するために $\chi^{\mu\nu}$ を導入しようとしているので，発散 ${}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ を考えることで $\chi^{\mu\nu}$ の構造についてのヒントを探ってみよう．$\chi^{\mu\nu}$ の発散が，少なくとも ${}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ の最初のゼロでない項を相殺しなければならない．この発散を計算するために，まず，動いている粒子に対する ${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ を，最初は見慣れない形に見えるだろうが計算が容易になる新しい形に書き替える．スカラー・パラメーター，固有時間 s で

の積分の形にすると(s での微分を・で表わす)

$$ {}^{\circ}T^{\mu\nu}(x) = m_0 \int ds\, \delta^4(x-z(s))\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} \qquad (6.1.3) $$

${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ のこの表現が以前に使ったものと同等であることは，作用の対応する項を比較すれば確認できる．

$$ \lambda \int d^4x\, {}^{\circ}T^{\mu\nu}(x)h_{\mu\nu}(x) = \lambda m_0 \int ds\, h_{\mu\nu}(z)\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} \qquad (6.1.4) $$

式 (6.1.3) の δ 関数の意味は，容易に物理的に解釈することができる．これは単に，粒子が実際に存在する場所以外では相互作用エネルギーがないことを意味している．我々がよく知っている電気力学を同じ表現で書き替えてみれば，この形が適切であることを理解できるだろう．ラグランジアンの相互作用項は $-j^{\mu}A_{\mu}$ の空間積分であり，j_{μ} は粒子の速度に関係している．

$$ \begin{aligned} j^{\mu}(x) &= e \int ds\, \delta^4(x-z(s))\dot{z}^{\mu} \\ S(\mathrm{int}) &= -e \int ds\, A_{\mu}(z)\dot{z}^{\mu} \end{aligned} \qquad (6.1.5) $$

重力場の場合の表現，式 (6.1.3) および (6.1.4) との対応は明らかである．

式 (6.1.3) から，発散 ${}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ を計算する．まず，δ 関数は x と z について対称であり，発散の式の x^{ν} での微分は，z^{ν} での微分(のマイナス)とすることができる．そして，恒等式

$$ \dot{z}^{\nu} \frac{\partial}{\partial z^{\nu}} f[z(s)] = \frac{d}{ds} f[z(s)] \qquad (6.1.6) $$

を使うと，${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ の発散は

$$ {}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \int ds\, \delta^4(x-z(s))\ddot{z}^{\mu} \qquad (6.1.7) $$

この発散は，加速度密度になっている．ここで，我々はすでにラグランジアンの中に，重力以外のすべてのエネルギーを正しく取り入れており，加速度 $\ddot{z}^{\mu}$ は，運動方程式

$$ \begin{aligned} g_{\mu\lambda}\ddot{z}^{\mu} &= -\frac{1}{2}[g_{\mu\lambda,\nu}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}]\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} \\ &= -[\mu\nu,\lambda]_z\, \dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu} \end{aligned} \qquad (6.1.8) $$

で与えられる重力の効果を表わしていると仮定しよう．角括弧の添字 z は，括弧内の記号が定義される位置を表わす．ここで発散 (6.1.7) に $g_{\mu\lambda}(x)$ を掛け，$g_{\mu\lambda}\ddot{z}^{\mu}$ を，$-[\mu\nu,\lambda]_z\dot{z}^{\mu}\dot{z}^{\nu}$ で置き換える．δ 関数のため，$[\mu\nu,\lambda]_z$ は $[\mu\nu,\lambda]_x$ としてよいことに注意しよう．つまり，角括弧の部分は積分の外に出すことができ，右辺は最初のテンソル ${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ で表わされる．

■幾何学的に言えば，${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ の通常の発散はゼロにならないが，「共変微分」による発散はゼロになるということ．

$$ g_{\sigma\lambda}(x)\,{}^{\circ}T^{\sigma\nu}{}_{,\nu}(x) = -[\mu\nu,\lambda]\,{}^{\circ}T^{\mu\nu}(x) \qquad (6.1.9) $$

これが，${}^{\circ}T^{\mu\nu}$ が満たさなければならない正確な方程式である．ここではこれを，h の1次のオーダーでのみ使う．$g_{\sigma\lambda}$ を二つの部分 $\eta_{\sigma\lambda}+$

$2\lambda h_{\sigma\lambda}$ に分け，${}^{\circ}T^{\lambda\nu}{}_{,\nu}$ が，結合定数 λ の 1 次の項から始まることを示す方程式を得る．

$$ {}^{\circ}T_{\lambda\nu}{}^{,\nu} = -[\mu\nu,\lambda]{}^{\circ}T^{\mu\nu} - 2\lambda h_{\sigma\lambda}{}^{\circ}T^{\sigma\nu}{}_{,\nu} \qquad (6.1.10) $$

角括弧部分には微分があるので，$g_{\mu\nu}$ のゼロ次の部分 $\eta_{\mu\nu}$ はきかないからである．

この方程式を，新しいテンソル ${}^{\rm new}T^{\mu\nu} \equiv {}^{\rm n}T^{\mu\nu}$ の発散がゼロ

$$ {}^{\rm n}T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = {}^{\circ}T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \chi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \qquad (6.1.11) $$

という要求と比較し，$\chi^{\mu\nu}$ 自体は場の二次式であると仮定すると，発散 $\chi^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ は

$$ \chi_{\mu\nu}{}^{,\nu} = [\sigma\nu,\mu]{}^{\circ}T^{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\lambda^2)\cdots \qquad (6.1.12) $$

とならなければならないことがわかる．

発散がわかっても $\chi^{\mu\nu}$ は決まらない．$\chi^{\mu\nu}$ は，F^3 の $h_{\mu\nu}$ での変分 (6.1.2) によって求まるという要求を付け加えよう．すると，場の成分の 3 次の積と 2 つの微分を含む，すべての可能な独立の項の和として F^3 を書くとすれば，これらの 2 つの要求により F^3 は一意的に決まる．ここで 18 個の定数を決めることはせず，大変な計算の結果だけを引用すると

$$ \begin{aligned} F^3 = -\lambda\Big[& h^{\alpha\beta}\bar{h}^{\gamma\delta}\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + h_{\gamma}{}^{\beta}h^{\gamma\alpha}\bar{h}_{\alpha\beta,\delta}{}^{,\delta} - 2h^{\alpha\beta}h_{\beta\delta}\bar{h}_{\alpha\gamma}{}^{,\gamma\delta} \\ & + 2\bar{h}_{\alpha\beta}\bar{h}^{\sigma\alpha}{}_{,\sigma}\bar{h}^{\tau\beta}{}_{,\tau} + \Big(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}h^{\alpha}{}_{\alpha}h^{\beta}{}_{\beta}\Big)\bar{h}^{\sigma\tau}{}_{,\sigma\tau}\Big] \end{aligned} \qquad (6.1.13) $$

となる．

これで，あとは摂動法を使うことにより，我々が以前考えたすべての効果を計算することができる．惑星の運動の場合には，ラグランジアンの積分に F^3 を加えると，軌道の計算で使うべき ϕ と ψ として，次の値を得る．

$$ \begin{aligned} \phi &= \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2\cdots \\ \psi &= \Phi - \frac{3}{8}\Phi^2\cdots \\ \Phi &= -2MG/r \end{aligned} \qquad (6.1.14) $$

この補正により，水星の近日点移動についての我々の計算と観測値は完全に一致し，残っていた，理論と観察との間の最後の不一致が取り除かれる．

6.2 すべての次数で正しい理論の構成

我々は，すべての知られた重力現象の特徴を適切に説明する重力場の理論を，他のよく知られた場の理論からの類推で構築するという，最初に設定した任務を達成した．仮想上の金星人の視点は生産的なものであった．しかし我々の理論の中には，まだ未完成の部分がある．金星の理論家の中でも努力家は，3 次の効果が決まっていない理論に

は満足できず，理論に高次の次数での整合性をもたせるために，関数 F^4，さらには F^5 を，ラグランジアン積分に加えようとするかもしれない．しかしこれは信じがたいほど骨の折れる作業であり，観測不可能な補正を計算するだけでもある．したがって我々はこの点に関しては，金星人を模倣はしない．

物理の理論では，展開したときの高次の補正の計算は異常に面倒なものになるが，すべての高次の補正を合計した理論を構築することは可能であることがある．そこで，関数 $F=F^2+F^3+F^4+F^5+\cdots$ に対する完全な表式を求めようとする，野心的で大胆な金星人を考えることにしよう．我々は，変分すべき作用となる関数 F を探す．経験によれば，ラグランジアンまたは(それと同等の)ハミルトニアンを出発点とする変分原理から求まらない理論はないからである．

ラグランジアン的でない理論がうまくいかないことが，自然についての根源的真実を反映しているのかどうかは，明らかではない．プロセスは最小位相の原理に基づいて起り，古典力学あるいは量子力学の作用は，ある近似でのこの位相の表現だというのが，根本の真実なのかもしれない．重力理論を非ラグランジアン的形式で作るという野心的な試みがバーコフ [Birk 43] によってなされた．彼は線形な場の方程式には手を触れず，粒子の運動方程式のほうを変更した．得られた古典力学は満足できるものだったが，つじつまの合った量子化はできなかった．波束の運動は，仮定された古典力学の方程式ではなく，アインシュタインの方程式を満たすことが示された．量子化によって，彼の場の方程式の隠れた矛盾があきらかになったのかもしれない．

そこで我々は，完全な関数 F を

$$F = F^2+F^3+F^4+\cdots \tag{6.2.1}$$

と定義したとき，運動方程式

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda T^{\mu\nu} \tag{6.2.2}$$

■両辺の「共変微分」による発散はゼロになるようにするということである．

が自動的に発散の性質，式 (6.1.9) を導くという要求を課す．つまり関数 F は，微分方程式

$$g_{\sigma\lambda}\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)_{,\nu} + [\mu\nu,\lambda]\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}}\right) = 0 \tag{6.2.3}$$

を満たすものとする．この方程式を解くのは極めて難しい問題であり，解を求める手続きといったものはない．何とか工夫をして，代入すれば式 (6.2.2) を満たすという意味での解を見つけなければならない．h での展開の最初の 2 項が，他の方法ですでに求めた F^2 や F^3 と一致するという条件を付けても，一意的な解は存在しない．しかし，「最も単純な」解は存在する($g_{\mu\nu}$ の微分が最も少ない，つまり 2 つしかない解)．我々はそれを選ぶ．そうすれば，アインシュタインの理論に一致する理論が得られる．その時点で我々は金星人の観点を放棄し，アインシュタインが展開した地球人の観点から，重力理論の研究を進めることになる．

6.3 無限小変換に対する不変量の構成

式 (6.2.3) を満足する解を作るという問題を解くために，この方程式を，F の性質についての等価な表現に変換する．まず，式 (6.2.3) はベクトル形であることに注意する．この式と任意のベクトル $A^\lambda(x)$ との内積をとり全空間で積分すると，やや異なって見える式を得る．

$$\int d\tau\left[A^\lambda(x)g_{\sigma\lambda}(x)\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)_{,\nu}+A^\lambda(x)[\sigma\nu,\lambda]\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)\right]=0 \tag{6.3.1}$$

任意の A^λ に対して F がこの式を満たすとすれば，式 (6.2.3) が導かれる．ここで第1項を部分積分し，ν についての微分を取り除く．すると

$$\int \underline{d\tau}\left(\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}\right)\left[-\left(A^\lambda(x)g_{\lambda\sigma}(x)\right)_{,\nu}+[\sigma\nu,\lambda]A^\lambda(x)\right]=0 \tag{6.3.2}$$

この積分，および σ と ν を交換した積分の平均をとるという意味で，$d\tau$ に下線を付けた．$h_{\sigma\nu}$ は対称なので，角括弧内も σ と ν について対称の場合のみ，意味のある数学的恒等式が得られる．この式 (6.3.2) は別の解釈が可能である．もし h に1次の変更を加える，つまり $h_{\sigma\nu}$ を $h_{\sigma\nu}+\xi_{\sigma\nu}$ に変えると，F の値は

$$F[h_{\sigma\nu}+\xi_{\sigma\nu}]=F[h_{\sigma\nu}]+\xi_{\sigma\nu}\frac{\delta F}{\delta h_{\sigma\nu}}+\cdots \tag{6.3.3}$$

■ (6.3.3)の右辺第2項では積分が省略されている．

と変わる．したがって式 (6.3.2) は，$\xi_{\sigma\nu}$ が無限小で，しかも式 (6.3.2) に出てくる形のとき，F は変わらないということを意味する．

■ $\xi_{\sigma\nu}$ が(6.3.2)の［ ］内の形をしているということである．

場のテンソル $h_{\mu\nu}$ が，無限小変換 A^λ によってテンソル $h'_{\mu\nu}$ に変わったとしよう．$h'_{\mu\nu}$ を，式 (6.3.2) が意味する規則に基づき，次のように表現する($\sigma\nu$ で対称化し，$[\sigma\nu,\lambda]$ の具体的な表式を使うことを頭に入れて)．

$$h'_{\sigma\nu}=h_{\sigma\nu}-\frac{1}{2}g_{\sigma\nu,\lambda}A^\lambda-\underline{g_{\lambda\sigma}A^\lambda{}_{,\nu}} \tag{6.3.4}$$

■ 下線は，(4.3.3)で定義された．

便宜上 $-A^\lambda=\zeta^\lambda$ とし，また $h_{\sigma\nu}$ ではなく

$$g'_{\sigma\nu}=g_{\sigma\nu}+g_{\sigma\lambda}\zeta^\lambda{}_{,\nu}+g_{\nu\lambda}\zeta^\lambda{}_{,\sigma}+\zeta^\lambda g_{\sigma\nu,\lambda} \tag{6.3.5}$$

というように $g_{\sigma\nu}$ を使ってこの式を書く．すると我々の問題は，$g_{\mu\nu}$ から $g'_{\mu\nu}$ への無限小変換 (6.3.5) において，任意の $\zeta^\lambda(x)$ に対して ζ^λ の1次のオーダーで不変であるような，$g_{\mu\nu}$ の汎関数 F の形を見つけるということになる．これに類似した方程式を扱う方法は微分幾何を扱う数学者によって開発されているので(たとえば [Vebl 27] を参照)，我々は教養のある金星の物理学者として，どのように進むべきかを教えてくれる本が手元にあると仮定しよう．

実際，変換 (6.3.5) は，座標の無限小変換 $x^\lambda=x'^\lambda+\zeta^\lambda$ のもとでのテンソル場 $g_{\mu\nu}(x)$ の変換である．しかしここでは我々は我々のゲームを続け，幾何学的解釈に気づかない金星人として，結果を求めてみ

よう．もちろん，後でアインシュタインの観点について議論するときに，幾何学的見方に戻る．

F に対する望ましい不変形を求めてみよう．添字を下付きではなく上付きにした，$g_{\mu\nu}$ の逆行列を定義すると便利である．

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^{\mu}_{\sigma} \qquad (6.3.6)$$

記号 δ^{μ}_{σ} は普通のクロネッカー・デルタであり，$\mu=\sigma$ のときは 1 で，$\mu\neq\sigma$ のときは 0 となる．

行列 $A'=A+B$ の逆行列は，B が無限小のときは，展開

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{A}-\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}-\cdots \qquad (6.3.7)$$

で与えられる．ζ^{λ} は無限小なので，この規則に基づき，$g'_{\sigma\nu}$ の逆行列は容易に作ることができ

$$g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}-\zeta^{\alpha}{}_{,\nu}g^{\nu\beta}-\zeta^{\beta}{}_{,\nu}g^{\nu\alpha}-\zeta^{\lambda}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\nu}g_{\sigma\nu,\lambda}+\cdots \qquad (6.3.8)$$

次に，ここでの方法を理解するために，容易に見つけることができる 1 つの不変量を調べよう．我々の完全な理論を与える，より複雑な不変量は，次の節で作る．

行列を少し変えたときに行列式がどのように変化するか，考えてみよう．行列式に対する次の表式を使う．

$$\mathrm{Det}\,A = e^{\mathrm{Tr}\,\log A} \qquad (6.3.9)$$

この等式の証明を議論するために時間をかけることはしない．これがもっともらしいと感じるためには，対角行列の場合，これは自明であることに気づけばいいだろう．

$$\mathrm{Det}\,A = A_{11}A_{22}A_{33}\cdots = e^{\log A_{11}+\log A_{22}\cdots} = e^{\mathrm{Tr}\,\log A} \qquad (6.3.10)$$

規則 (6.3.9) を，$(A+B)$ の行列式を計算するのに使う．ただし B は無限小の行列である．必要なのは，$A+B$ の対数である．適切な展開は

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\left[A\left(1+\frac{1}{A}B\right)\right] &= \mathrm{Det}\,A\cdot\mathrm{Det}\left(1+\frac{1}{A}B\right) = \mathrm{Det}\,Ae^{\mathrm{Tr}\left(\log\left(1+\frac{1}{A}B\right)\right)}\\ &= \mathrm{Det}\,Ae^{\mathrm{Tr}\frac{1}{A}B} \qquad (6.3.11)\end{aligned}$$

ここで，$g'_{\sigma\nu}$ の行列式を計算するのにこの規則を使い，その結果の対数をとる．

$$\log(-\mathrm{Det}\,g') = \log(-\mathrm{Det}\,g)+2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda}+\zeta^{\lambda}g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\sigma\nu} \qquad (6.3.12)$$

最後の項の g 行列の積は，行列式と次のような関係

$$g_{\sigma\nu,\lambda}g^{\sigma\nu} = [\log(-\mathrm{Det}\,g)]_{,\lambda} \qquad (6.3.13)$$

にある．以上の計算で求まったのは，ζ^{λ} とその微分に関する，行列ではなく数を含んだ新しい表式である．ここで $C=\log(-\mathrm{Det}\,g)$ と書き，最後の方程式を書き替えると，

$$C' = C+2\zeta^{\lambda}{}_{,\lambda}+C_{,\lambda}\zeta^{\lambda} \qquad (6.3.14)$$

最後の 2 項の和が何かの発散だったら，全空間で積分することにより，求めていた不変量が得られる．この 2 項を見ると，積分因子として $\exp(C/2)$ という形が示唆される．そこで，$\exp(\alpha C')$ という形の不変量を探そう．ζ^{λ} は無限小なので，1 次の項のみを残す展開は

$$e^{\alpha C'} = e^{\alpha(C+2\zeta^\lambda{}_{,\lambda}+C_{,\lambda}\zeta^\lambda)} = e^{\alpha C}+e^{\alpha C}(\alpha 2\zeta^\lambda{}_{,\lambda}+\alpha C_{,\lambda}\zeta^\lambda) \quad (6.3.15)$$

となる．この表式の第 2 項は，発散として書ける形をしている．実際，

$$(e^{\alpha C}\zeta^\lambda)_{,\lambda} = e^{\alpha C}\zeta^\lambda{}_{,\lambda}+\alpha C_{,\lambda}\zeta^\lambda e^{\alpha C} \quad (6.3.16)$$

であり，もし $\alpha=1/2$ ならば，これは式 (6.3.15) の第 2 項に等しい．式 (6.3.15) を全空間で積分すると，$\alpha=1/2$ ならば第 2 項の積分は消え，次の等式を得る．

$$\int d\tau \exp(C'/2) = \int d\tau \exp(C/2) \quad (6.3.17)$$

つまり，不変な解は行列 $g_{\sigma\nu}$ を使って

$$^\circ F = \int d\tau\sqrt{-\mathrm{Det}\, g} \quad (6.3.18)$$

となる．

6.4 全次数で正しい理論のラグランジアン

前節の不変量 $^\circ F$ は，実際，汎関数微分方程式 (6.2.3) の解ではあるが，微分を含んでいないので，我々の理論に必要な解ではない．この項では類似の方法を使って，我々の理論に必要な解を作ろう．この方法の成功の秘訣は，全空間で積分できる発散形を見つけることにかかっている．

出発点は，ζ^λ とその微分が出てくる式 (6.3.5) である．原理は，ζ を含まない(少なくとも発散の中にしか含まない)，$g_{\mu\nu}$ とその微分の組合せを見つけることである．式 (6.3.5) には ζ の微分がある．$g'_{\mu\nu,\sigma}$ を作ると，$\zeta^\lambda{}_{,\sigma\nu}$ などの 2 階微分が現われる．ますます複雑になるように見えるだろう．しかし，もし 2 階微分が $\zeta^\lambda{}_{,\sigma\nu}$ であり，それが 1 項にしか現われなければ，σ と ν を交換した項を引くことによって消去することができる．(実際には我々のケースでは，$\zeta^\lambda{}_{,\sigma\nu}$ の表式自体が自動的に対称なので，これはうまくいかない．しかしこのトリックを，高階微分で使う．) まず，$g'_{\mu\nu,\sigma}$ を計算すると ζ の 2 階微分が出てくるが，$\zeta^\lambda{}_{,\nu\sigma}$ と $\zeta^\lambda{}_{,\mu\sigma}$ の 2 つが現われる．これを，$g'_{\mu\sigma,\nu}$ のような別の微分と組み合わせて 1 つにしたい．実際，2 項を除去することができるが，同じ数の新しい項が出てくるので簡単にはならない．しかし第 3 の形 $g'_{\sigma\nu,\mu}$ を考えると，足したり引いたりして，2 項が同じ形になり一緒にすることができる新しい方程式を得る．一つの問題は，積の微分をとるので，たとえば

$$g'_{\mu\nu,\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\lambda,\sigma}\zeta^\lambda{}_{,\nu}+g_{\nu\lambda,\sigma}\zeta^\lambda{}_{,\mu}+g_{\mu\lambda}\zeta^\lambda{}_{,\nu\sigma}+g_{\nu\lambda}\zeta^\lambda{}_{,\mu\sigma}+\zeta^\lambda g_{\mu\nu,\lambda\sigma}+\zeta^\lambda{}_{,\sigma}g_{\mu\nu,\lambda} \quad (6.4.1)$$

のように項の数が非常に増えることである．しかしすべてを足したり引いたりして添字を入れ替え，対称化すると，

$$[\mu\nu,\sigma]' = [\mu\nu,\sigma]+[\mu\lambda,\sigma]\zeta^\lambda{}_{,\nu}+[\nu\lambda,\sigma]\zeta^\lambda{}_{,\mu}+[\mu\nu,\lambda]\zeta^\lambda{}_{,\sigma} + \zeta^\lambda[\mu\nu,\sigma]_{,\lambda}-g_{\sigma\lambda}\zeta^\lambda{}_{,\mu\nu} \quad (6.4.2)$$

となり，$\zeta^\lambda{}_{,\mu\nu}$ だけが残る．$g_{\sigma\lambda}$ は逆行列を掛けて取り除かなければな

らない．まず便宜上，新しい記号を導入する．

$$g^{\tau\sigma}[\mu\nu,\sigma] = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \qquad (6.4.3)$$

残っている2階微分を取り出すために式 (6.4.2) に $g_{\sigma\tau}$ を掛ける．新しい記号(ホロノミック接続係数，またはクリストッフェル記号と呼ばれる)を使うと，この方程式は

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}{}' = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\lambda}\zeta^{\lambda} - \zeta^{\tau}{}_{,\mu\nu} \qquad (6.4.4)$$

これは自動的に，$\mu\nu$ について対称になっている．ここでさらに微分する．この方程式を新しい添字 ρ について微分し，ρ と ν を交換した式を差し引くと，残るのは

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho}{}' - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho,\nu}{}' = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\tau}_{\mu\lambda,\rho}\zeta^{\lambda}{}_{,\nu} + \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda,\rho}\zeta^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho\lambda}\zeta^{\lambda} + \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}\zeta^{\lambda}{}_{,\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\zeta^{\tau}{}_{,\lambda\rho} - (\rho\leftrightarrow\nu) \qquad (6.4.5)$$

だけである．

ここで，2つの2階微分の項を取り除こう．これには Γ が掛かっている．しかし式 (6.4.4) には，$\zeta^{\lambda}{}_{,\mu\nu}$ を表わす表式がある．これを使って，式 (6.4.5) の余分の項を差し引く．そのためには，式 (6.4.4) のような2つの方程式の積を作ればよい．1つの項の Γ の添字は，他の項の ζ の添字と同じである．したがって，式 (6.4.4) 2つの積をとり，ただし片方の添字は $(\tau\rho\lambda)$，もう一方は $(\lambda\mu\nu)$ とし，(τ,μ,ν) を置き換えて式 (6.4.5) に加えると，2階微分は相殺する．

新しい量 $R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}$ を，

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\tau}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\tau}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \qquad (6.4.6)$$

と定義する．このテンソルは ρ と ν についてあらわに反対称である．これを使うと，最終的に得られる式は

$$R'^{\tau}_{\mu\nu\rho} = R^{\tau}_{\mu\nu\rho} + \zeta^{\lambda}{}_{,\nu}R^{\tau}_{\mu\lambda\rho} + \zeta^{\lambda}{}_{,\rho}R^{\tau}_{\mu\nu\lambda} + \zeta^{\lambda}{}_{,\mu}R^{\tau}_{\lambda\nu\rho} + \zeta^{\tau}{}_{,\lambda}R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} + \zeta^{\lambda}R^{\tau}_{\mu\nu\rho,\lambda} \qquad (6.4.7)$$

次にすべきことは，この方程式を，式 (6.3.5) と同様に扱うことである．$g_{\sigma\nu}$ が複雑な $R^{\tau}_{\mu\nu\rho}$ に変わっただけで，式の形は同じである．まったく同じ手続きを使うと，不変量 F に対する答が求まる．

$$F = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d\tau\, g^{\mu\nu} R^{\tau}{}_{\mu\nu\tau}\sqrt{-\mathrm{Det}\, g_{\alpha\beta}} \qquad (6.4.8)$$

これが求めていた量であり，全次数で正しい理論の作用の一部となる．

6.5 エネルギー運動量テンソルに対するアインシュタイン方程式

求めた汎関数 F を使えば，金星人の重力理論はアインシュタインが展開した重力理論に一致する．重力場が弱いときに汎関数 F を展開すると，前に使った F^2 や F^3 が最初の2項として出てくる．したがって，金星人の視点から自己無撞着な重力理論を構築するという目的は超人的な鋭い直感なしに，電気力学とのアナロジーで推測した，段階的な論理をたどって達成された．

アインシュタインは，進んだ場の理論の助けなしに，同じラグランジアンに到達した．この最終結果を彼がどのようにして考えついたの

か，私にはわからない．我々はこの理論に到達するのに，多くの困難に出会った．しかし私には，彼は水中を目隠しして，手を背中で縛ったまま泳ぎながら問題を解いたかのように見える．しかしいずれにせよ，我々は等価な理論に到達したので，金星人の視点を捨てて，アインシュタインによる地球人の視点を検討することにしよう．

$R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho}$ に $g_{\alpha\beta}$ を掛け縮約をとって求まる3つのテンソルを導入する．

$$g_{\tau\sigma}R^{\tau}{}_{\mu\nu\rho} = R_{\sigma\mu\nu\rho}, \qquad (\sigma\mu) \text{ と } (\nu\rho) \text{ について反対称}$$
$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\tau} = R_{\mu\nu}, \tag{6.5.1}$$
$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$$

$R_{\sigma\mu\nu\rho}$ はテンソルである(リーマン・テンソル)．ν と ρ の交換に対しても σ と μ の交換に対しても反対称だが，$\sigma\mu$ と $\nu\rho$ の対での交換に対しては対称である．$R_{\mu\nu}$(リッチ・テンソル)は対称である．

汎関数 F，式 (6.4.8) の $g_{\mu\nu}$ による変分は

$$2\frac{\delta F}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \tag{6.5.2}$$

ただし

$$g \equiv \mathrm{Det}\, g_{\mu\nu}$$

式 (6.5.2) の最後の量は我々の理論でのエネルギー運動量テンソルであり(式 (6.2.2) 参照)，$T^{\mu\nu}$ に代入すれば，我々が要求した通りに次の方程式を満たす．

$$g_{\sigma\lambda}T^{\lambda\nu}{}_{,\nu} = -[\mu\nu,\sigma]\,T^{\mu\nu} \quad (\text{あるいは} \quad T^{\lambda\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}) \tag{6.5.3}$$

つまり，全次数で正確な重力場の方程式は

$$\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = \lambda^2 T^{\mu\nu} \tag{6.5.4}$$

となる．ただしここでは $T^{\mu\nu}$ は，我々の物質のエネルギー運動量テンソルである．これが，アインシュタインが得た方程式であった．

第7章

7.1 等価原理

次のプロジェクトとして，相対論と重力理論を，アインシュタインの方法により近い観点から解説しよう．重力理論を別の立場から見ることによって，理論全体の理解を深めたい．アインシュタインのアイデアの枠組みで見た重力理論は非常に刺激的なものであり，重力を，我々がなじんでいる他の場のように見せるという金星人の方向ではなく，他のすべての場を重力のように見せたいという誘惑に強くかられる．我々はこの誘惑に耐えよう．

アインシュタインのアプローチの種(たね)は，彼の時代に知られていた物理である電磁気学とニュートン力学に見ることができる．自分の理論を発展させるときにアインシュタインの頭の中にあった最優先事項は，物理のすべての分野は互いに整合していなければならないということだったようである．彼は，古典電磁気学のローレンツ不変性と，ニュートン力学のガリレイ不変性とを融合する方法を発見し，多くの新しい結果を得た．同様に，彼を新しい重力理論に導いたのは，重力についてのある一つの不思議な事実を物理の原理としたことであった．

重力理論の中心的アイデア，つまりその作用の仕方について最も印象的な現象は，重さと質量が正確に比例しており，重力の下ではすべての物体は，その構成物質とは無関係に正確に同じ割合で加速するという事実である．エトヴェシュの実験は，遠心力は重力に，その合力が純粋な重力の効果とは区別不可能であるかのように加わることを示した．この事実からアインシュタインは，加速がすべての点で重力と等価となるような原理があるのではないかと考えた．加速している箱の内部でなされる力学の実験結果は，静止しているが重力のある箱の内部での実験結果と区別不可能であることは，明らかである．アインシュタインの時代にはこのことの直接的検証はなされていなかったが，現代では，重力と加速の相殺の結果としての人工衛星中の無重力は，よく知られている．等価原理の要点は，この相殺の可能性である．

このアイデアから有用な物理を得るためには，より正確で，具体的な測定と関係した，このアイデアの表現を考えなければならない．ニュートン力学を使った意味のある，より正確な表現は，静止した物体に対する力が関係するだろう．もし一定な加速度gで箱を上方に加速したとすると，箱の内部で静止しているすべての物体に対しては，重

さに正確に比例した力が働いていなければならない．たとえば，箱の中で重さを支えるテーブルやバネにかかる力は，強さ g の一様な重力場が生成する力と同じである．テーブルへの力は直接測定できる量ではないので，バネにぶらさがっている物体を考えるほうがよいだろう．図 7.1 に示したように，同じ物体が同じバネにぶらさがっているときのバネの延びは，(1) 強さ g の重力場中に箱が静止している場合と，(2) 重力場はないが箱が一様な加速度 g で，上方に加速している場合とでは，正確に同じになるはずである．

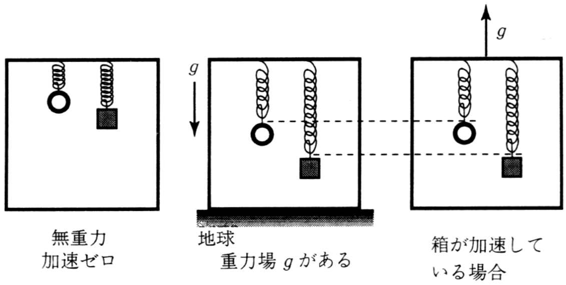


図 7.1

この等価原理の表現はより物理的ではあるが，力の性質を正確に定義していない，初等的レベルでの話である．力の性質を定義しない，意味のある物理的な表現は可能だろうか．ニュートン力学での状況を思い出してみよう．ニュートンの法則

$$F_x = m\ddot{x} \tag{7.1.1}$$

は単に力の定義であり，真の物理は含んでいない，循環論法であるとしばしば言われる．しかし明らかに，ニュートン理論全体は，月や惑星の軌道を正しく予測できるので，循環論法にはなっていない．規則 (7.1.1) に基づいて力を計算すべきであると言ったときのニュートンの意図は，もし加速があれば，その力を生み出す物理的なものを探すべきであるということであった．物理の問題は，物体の環境と，式 (7.1.1) の右辺に入れるべき，観測された加速に合致する力との関係を探すことにある．

ニュートンが第三法則

$$F(\text{作用}) = -F(\text{反作用}) \tag{7.1.2}$$

を提示するとき，彼は力と物体との間の関連を具体的に述べているので，物理的表明をしていることになる．彼の重力の法則は，物体の環境とその加速との関係についての，別の具体的表現である．第二法則は，「cherchez la femme」の精神で与えられたものである．もし力があるとすれば，それを作り出した責任者を探さなければならない．

■ cherchez la femme は仏語で「犯罪のかげに女あり」の意．

同様に，等価原理の我々の簡単な定式化も，環境がいかに物事に影響するのかについての物理的な表現となる．それは，ニュートンの第二法則 (7.1.1) の正しさには依存しない．この場合の環境とは，重力場を作り出す物体か，あるいは加速である．

一様な加速によって重力の効果を完全に消し去ることはできない．

地球の周りの軌道上の箱，つまり衛星を考えてみよう．地球の場は一様でないので，衛星の重心近くの一点でのみ，重力の効果と加速が正確に相殺する．重心から離れると地球の場は，強さあるいは方向が変化し，小さな重力が残る．箱があまり大きくなければ，この小さな力は箱の中心からの距離にほとんど比例し，図 7.2(a) に示されているように，四重極的性質をもつ．このような力は地球上の潮の干満をもたらすので，潮汐力と呼ぶこともできる．また，図 7.2(b) に示されているように，同様の一様でない場の中にあるが，加速はしていない箱を考えることもできる．等価原理によれば，衛星の内部で，物理的に図 7.2(a) と区別不可能な状況を作ることもできる．大きな物体を遠方に置くことにより，箱の中心で重力を正確に相殺するような，一様な場を作り出して重ね合わせればよい．

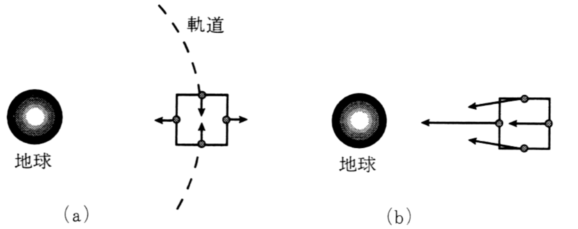


図 7.2

どのように，等価原理のうまい表現ができるか考えることにしよう．加速している箱の中の重力場は，異なる重力場と異なる加速の合計に等価である．ある点のある時刻では，重力を相殺することができる．その点の近傍での残留重力は，相殺した点からの距離に比例するはずである．理論を構築する際に

$$(\text{重力})' = (\text{重力}) + (\text{加速}) \tag{7.1.3}$$

という形に書ける変換を考えていることは，明らかになっただろう．この変換があるため，ある効果が重力であり，ある効果が慣性であると，絶対的な区別をすることはできない．観測された力のうちのどれだけが重力であり，どれだけが加速によるものか，正確に定義することは決してできないので，「真」の重力を定義することは不可能である．大きな箱を考えるとき，すべての場所で加速によって重力と同じ効果を生み出すことはできないというのは正しい．しかし，無限小の領域で変換 (7.1.3) を考えることにより，状況を表わすさまざまな方法を学べるだろう．そしてそれによって初めて，境界条件，つまり広い領域での重力の説明について考えることができるようになる．

特殊相対論では，直線的に一定の速度で動いている座標系というものが，頻繁に使われる．しかし宇宙のいかなる場所にも重力源があることを認めるとすると，重力場がいたる所に存在することになるので，そのような加速がまったくない運動という概念はありえない．

もし，自由落下状態ではない箱の内部で実験をしたとすると，たとえばバネを使うなどして，重力的な力の存在を検知することが可能に

なる．しかし箱の中からは，そこが銀河に対して加速しているのか，あるいは近傍の物体による力を受けているのか，区別することはできない．重力のこの顕著な特徴が，結局は我々を完全な理論に導くことになる，根本原理のヒントを与えるのである．

我々は次の根本原理を提示する．箱の内部で行なういかなる実験によっても，銀河に対する加速と重力との差異を検知することはできないと．つまり，重力場中で加速している箱と異なる重力場中の静止した箱とは，区別不可能である．

この原理は，まさにアインシュタインのように聞こえるではないか．彼の特殊相対論の原理に，まさに似ているではないか．我々は，等価原理がバネに対して有効であることを知っている（特殊相対論が電気力学に対して有効であることを知っているように）．そして我々は決断によって，それをすべての実験に拡張する．現在は，このような手続きに皆が慣れている．しかし 1911 年には目覚ましい考え方であった．アインシュタインは，なんと素晴らしく賢い人だったのか．

7.2 等価原理のいくつかの結論

等価原理は，重力場中では光も落下することを教える．一様な重力場中である距離を移動するときに光が落下する程度は，加速している箱を考えることによって，非常に容易に計算できる．箱が加速している場合，光は加速のない座標系での直線上を動く．したがって，箱の内部に光の経路を計算するのは，単純な数学である．実験には，光源と検知器，そして光の経路を定める一連のスリットだけあればよい．

星による光の屈曲の場合は，星の重力場が一様ではないので，このような簡単な方法では計算できない．ニュートン・ポテンシャルを使った，これに似た単純な計算では，2 倍だけ異なる結果が求まる．正しい計算には，適切な相対論的な場を使う必要がある．

等価原理はまた，時計の進みが重力によって影響を受けることも教える．加速している箱の上部から放出された光は，その底では青方偏移して見える．速度が小さいとして，計算してみよう．図 7.3 の箱の高さを h とすると，第一近似では光の移動時間は c/h である．この時間中に，箱の底は小さな速度 $v=gh/c$ を加える．受信器は発信器に

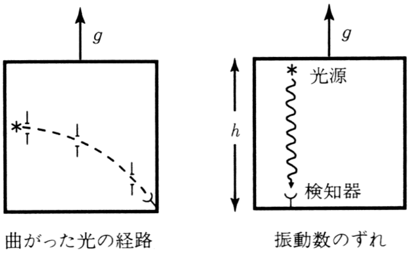


図 7.3

対して相対的に動いているので，振動数の変化は

$$f_{\text{受信}} = f_{\text{発信}}(1+v/c) = f_{\text{発信}}(1+gh/c^2) \qquad (7.2.1)$$

したがって，底の時計は，放出された振動数とは異なる振動数の光を受ける．この結論は，前の議論で必要だった$E=mc^2$にもエネルギー・レベルの存在にも無関係であることに注意．この結論は，古典的物体の予想される振る舞いにのみ基づく．計算は，幾何学と運動学から得られており，等価原理の直接の結果である．前と同様，パラドックスではない．上部の時計は青く見え，同様に，箱の上部にいる人間は，底にいる人間よりも青く見える．同様に，下にいる人間が放出する光の振動数のずれを計算することもできる．この場合，受信器は光源から遠ざかっているので，下にいる人は，上からは赤く見える．

この状況を説明する一つの方法は，箱の上部では時間のスケールが速いと考えることである．重力ポテンシャルが異なれば時間の流れも異なるので，世界の各部分で時間の流れは等しくない．空間の各部分で，時間はどれだけ違うのだろうか．それを計算するために，時間の進みと，固有時間dsによって定義される絶対的な時間差を比較しよう．上部で，時間がdtだけずれて起きた2つの事象があったとする．すると，速度が小さな極限では

$$\phi = gh; \quad ds = dt(1+\phi/c^2) \qquad (7.2.2)$$

ϕは，事象が起きた場所と，基準点でのポテンシャルの差である．より注意深い計算をすると，任意の速度で正しい表式

$$ds = dt\sqrt{1+2\phi/c^2} \qquad (7.2.3)$$

が求まる．ここでも，単純なニュートン・ポテンシャルを使ってはいけないことに留意しなければならない．ϕの定義は相対論的に正確なものでなければならない．

7.3　重力場中での最大時間

重力の効果により，ポテンシャルが大きい領域では時計が速く進むことがわかったので，ここで面白いパズルを考えてみよう．地表から離れて上に上がると，時計は速く進む．一方，動かすと，特殊相対論での時間の遅れによって，時間を損する．では，できるだけ時計を進めるには，地表でどのように上下したらよいだろうか．話を簡単にするために，地球の重力場は一様であるとし，一次元的な運動だけを考える．この問題には明らかに解がある．非常に速く，たとえば光速で動くとすれば，時計はまったく進まないので，地表上の時計に遅れをとる．時計をわずかに持ち上げてそこにとどめるとすると，地表上での時間よりも進む．明らかに，地表でのある一定の時間内に，時計を最も速く進める最適な方法がある．

まず，時計は最終的には地表の元の場所に戻し，地表上で静止していた時計と比較することにしよう．詳しく計算してみるのもよい練習問題になるだろうが，まず答を言う．地表上でのある一定の時間，た

とえば 1 時間に，動いている時計を最も速く進めるには，ちょうど 1 時間で元に戻ってくるように，上に射ち上げて自由落下させればよい．図 7.4 参照．次元を多くして考えると，問題はもっと難しくなるが，答は変わらない．時計が 1 時間後に，地表上の別の地点に戻るようにするためには，時計を弾道曲線に射ち出さなければならない．同じ答が，一様でない重力場の場合にも得られる．時計をある衛星から別の衛星に射ち出したとすれば，真の軌道は正確に，固有時間を最大にするものになる．

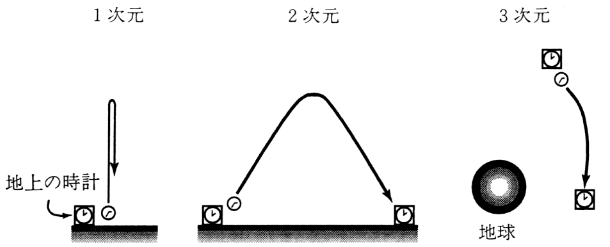


図 7.4

正確な定義をしていないため，この問題を解く際にはいくつかの困難が生じる．たとえば，自由落下の解は 1 つだけとは限らない．弾道の問題は一般に，解が 2 つある．2 種類の角度と初期速度が，極大値を与える(衛星の軌道は地球を逆回りしてもよい)．しかし，これらの解のいずれも，動いている時計の経過時間を極大にする．真に最大なのか単なる極大なのかは，我々の目的にとっては重要でない．重要なのは，これらの解が，変分原理から力学を得る方法を示唆しているということである．

経過時間が最大であるという性質の重要性を理解するには，速度が小さな極限で何が起こるかを考えればよい．経過時間は ds の積分であり，これが時計の進み方を表わしている．非相対論的極限では

$$\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1-\frac{v^2}{2c^2}$$

なので，最大にすべき積分は，

$$\int ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(1+\frac{\phi}{c^2}-\frac{v^2}{2c^2}+\cdots\right) \qquad (7.3.1)$$

である．第 1 項は，基準とする座標系での時間差 (t_1-t_0) を与える．他の 2 項は，粒子の質量を掛け符号を変えることによって，非常になじみ深い形にすることができる．

$$\int ds = (t_1-t_0)-\frac{1}{mc^2}\int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2}mv^2-m\phi\right) \quad (7.3.2)$$

時間差 (t_1-t_0) が一定のときにこの表式を最大にするには，右辺の積分を最小にすればよい．しかしこの積分は，重力ポテンシャル ϕ 中の質量 m の粒子の古典的作用に他ならない．固有時間が最大であるという条件は，古典極限での最小作用の原理と等価であることがわか

る.

以上の結果は，力学原理(大雑把に言えばニュートンの第二法則)を相対論的なものにする方法を示唆する．つまり，$\int ds$ の変分がゼロ

$$\delta \int_1^2 ds = 0 \qquad (7.3.3)$$

とすればよい．これが，重力場中の運動を与える原理であるというのが，アインシュタインの推論であった．これにより，重力場中の運動方程式を見つけるという問題が解ける．残る問題は，この表式に現われるポテンシャル ϕ を環境と結びつけることである．これはアインシュタイン以前は大きな問題であった．どのようにして正しい ϕ を見つければよいのだろうか．正しくない重力を使ったら，たとえば遠心力がある座標系なのにそれに気づかず計算したらどうなるだろうか．重力は慣性力と複雑に絡み合っており，この2つの，普遍的に有効な分離は不可能であることを我々は知っている.

このような状況では，普遍的に正しい ϕ を使うかどうかは問題ではないというのが，アインシュタインの推論であった．ϕ が正しく定義されさえすれば，現象の説明は，慣性と重力の効果をいかに分離するかには依存するはずがないというのである．このような性質をもつ ϕ の公式を作るためにすべきことは，(重力$'$＝重力＋加速) という形で表現した変換で移り変わる，異なる座標系での固有時間 ds の表現を，注意深く調べることである．そうすることによって，すべての可能な変換に対して不変であるような ds の表式を構築することができるかもしれない.

7.4　一般座標での固有時間

$(ds)^2$ に対するアインシュタインの公式を得るには，加速ばかりでなく，任意の歪みがある座標系を考えなければならない．回転座標系

$$\begin{aligned} x' &= x\ \cos\omega t + y\ \sin\omega t, \quad z' = z \\ y' &= y\ \cos\omega t - x\ \sin\omega t, \quad t' = t \end{aligned} \qquad (7.4.1)$$

に類似した一般的な公式を求めたい．ある座標系の各座標の，他の座標系のすべての座標に対する依存性を指定することによって，加速と伸縮を表わす.

$$\begin{aligned} x &= x(x', y', z', t'), \quad z = z(x', y', z', t') \\ y &= y(x', y', z', t'), \quad t = t(x', y', z', t') \end{aligned} \qquad (7.4.2)$$

まず，$\phi=0$ の場合を考えよう．この場合，歪んでいない座標系の固有時間は，

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \qquad (7.4.3)$$

となることがわかっている($c=1$ とした).

ダッシュの付いた座標で固有時間を表わすには，単に微分を

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad (ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (7.4.4)$$

と書き替えればよい．

これにより，任意の歪んでおり加速もしている座標系での微小長さ ds の表現を与える計量テンソル $g'_{\alpha\beta}$ が定義される．

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta}dx'^\alpha dx'^\beta \quad (7.4.5)$$

積 $dx^\alpha dx^\beta$ は 10 個あるので，$g'_{\alpha\beta}$ も，座標 (x', y', z', t') の関数 10 個を表わしていることに注意しよう．計量テンソルは対称である．これらの 10 個の関数を指定すれば，固有時間を最大にする経路を見つけるのは，純粋に数学の問題となる．

重力がゼロでなかったらどうなるだろうか．前節で考えた単純な場合，固有時間は

$$(ds)^2 = (1+2\phi/c^2)(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2 \quad (7.4.6)$$

という形で与えられることがわかっている．

これは，重力場がゼロのときと，僅かしか違っていない．重力は常に

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (7.4.7)$$

という計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ によって完全に表わされるというのが，アインシュタインのアイデアであった．重力場がゼロというのは，計量テンソルが $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}$ という，特に簡単な形の場合に対応する．座標系を変えると，新しい計量テンソルは

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu} \quad (7.4.8)$$

となる．そして前の場合と同様，粒子の運動は，固有時間が最大になるという要求によって決まる．何らかの賢い変換によって $g'_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}$ とすることができれば，重力場はゼロであり，加速もないと結論することができる．しかしこれは常に可能だとは限らない．一般のテンソル $g_{\alpha\beta}$ は独立な 10 個の関数からなり，座標変換 (7.4.2) では，4 つの関数しか指定できないからである．加速は非常に特殊な状況でしか，すべての $g_{\mu\nu}$ をすべての場所で消し去ることはできない．もし実際に環境に何らかの物質があるのなら，$\eta_{\alpha\beta}$ とすることはできない．その場合，式 (7.4.8) によって互いに関連づけられるすべての可能なテンソル $g_{\alpha\beta}$ は，そのいずれも，$(ds)^2$ に対する特別に単純な表式を与えるわけではないので同等である．

我々は，重力の表わし方について学んだ．ニュートン理論でそれに対応するのは，力はスカラー関数の勾配によって与えられるという表現である．つまり

ニュートン理論　　$m\ddot{x} = F_x, \quad F_x = -\nabla\phi$

アインシュタイン理論　　$\delta\int ds = 0, \quad (ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

(7.4.9)

重力理論の次の部分は，ポテンシャル(ϕ または $g_{\mu\nu}$)と物質の関係を指定することである．ニュートン理論では

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \qquad (7.4.10)$$

である．テンソル $g_{\mu\nu}$ は結局は，物質によって指定される．そのときに基本となる考え方は，物質は物理的なものだが座標系はそうではないので，運動方程式を解いた結果が，座標系の選び方には依ってはいけないということである．テンソル $g_{\mu\nu}$ の任意の座標変換に対して不変な性質のみが，意味があると予想される．

7.5　計量テンソルの幾何学的解釈

テンソル $g_{\mu\nu}$ には幾何学的意味が付けられる．このテンソルの中に含まれている不変量を推測するため，2 次元の場合にその意味を少し考えてみよう．一様な重力場の場合，テンソル $g_{\mu\nu}$ が，空間のそれぞれの場所での時間のスケールの異なり方を表わしていることをすでに見た．一般的に言えばこのテンソルは，時間ばかりでなく空間座標についても，各点でのスケールの違いを表わす．直線直交座標系では，2 次元の線素 ds は，

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad (7.5.1)$$

となり，極座標では，

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 \qquad (7.5.2)$$

となる．明らかに，座標として使っている記号自体には意味はない．平面上の物理は，直線直交座標を使っても極座標を使っても変わらない．つまり我々が選んだある座標系で，線素が

$$(ds)^2 = y^2(dx)^2 + (dy)^2 \qquad (7.5.3)$$

と表わされることがわかったとしても，x 方向の長さが座標 y とともに変化するという事実には深い意味はない．簡単な座標変換で，線素は直線直交座標系での形になる．

もっと興味深いケースを調べてみよう．我々は，床が正方形のタイルでできていると思い込んで，その床を這っている虫であるとする．床の幾何はタイルの数を勘定する，すなわち dx と dy をタイルの数だとしてユークリッド的規則 (7.5.1) を使って正しく求まる．そう生まれたときから信じている虫である．しかし，もっと賢い虫が，物差しを使ってこのことを調べ始め，測定の結果，線素の長さはタイルの数と，

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{1 + ar^2} \qquad (7.5.4)$$

ただし

$$r^2 = x^2 + y^2$$

というように関係していることを発見した．その小さな虫が，r が一定の曲線に沿って，また中心からある軸に沿って物差しを並べることによって，円の半径と円周の比を非常に注意深く測定したとする．その結果は，

$$\text{円周} = \int ds = \int_0^{2\pi} \frac{r\,d\theta}{(1+ar^2)} = \frac{2\pi r}{(1+ar^2)}$$

$$\text{半径} = \int_0^r ds\Big|_{y=0} = \int_0^r \frac{dx}{(1+ax^2)} = b\ \mathrm{Arctan}\left(\frac{r}{b}\right) = R \qquad (7.5.5)$$

ただし，$b^2=1/a$ とする．

円周と半径の比についての測定結果は，

$$\frac{1}{R}\frac{2\pi b\tan(R/b)}{1+\tan^2(R/b)} = 2\pi\frac{\sin(2R/b)}{(2R/b)} \qquad (7.5.6)$$

となる．これは，円の半径がゼロになる極限でのみ 2π になる．物理的に意味があるのは，この測定可能な比である．

このモデルは簡単な幾何学的な解釈ができるが，重要なのは測定結果であり，それは線素に対する正しい公式にのみ依存することを強調しておこう．簡単に視覚化できるような幾何学的な意味を公式に与えられるかどうかは，まったく問題にはならない．

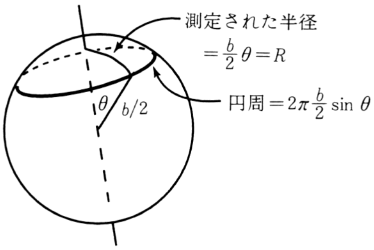


図 7.5

虫である我々は，それとは気づかずに球の表面で生きてきたと言うこともできる．そのことに気づけば，円周の測定結果が式 (7.5.6) のようになったことを容易に理解できる．もし球の半径が $(b/2)$ であれば，式 (7.5.6) は図 7.5 に示されているように，子午線に沿って測った距離と円周との比を表わす．

重力についての我々の以前の見方は，保守的な虫がもっていた見方に対応する．タイルは「本当」は正方形だが，物差しを動かしたので，何らかの場によって物差しが影響を受けたと考えるのである．一方，新しい幾何学的な見方では，タイルが「本当」に正方形であるかどうかは決められないと考える．我々は一般に，適切な測定によって求まる曲率をもつユークリッド的ではない世界に生きている．事象が，真にユークリッド的な空間で起きていると考える必要はない．この仮想上の空間で測定できるものは何もないからである．タイルは単に座標の表示を表わしているだけであり，他の表示でも構わない．

7.6 2 次元および 4 次元の曲率

座標系の選び方に依らない方法で空間の幾何を特徴づける不変量が，曲率である．曲率という概念は，2 次元空間で考えると視覚化しやすい．平坦な，曲がっていない空間が平面であり，曲がった空間が曲面である．後で曲率を解析的に扱う必要が出てくるが，容易に視覚化できる 2 次元の幾何を少し考えてみる．高次元での曲率という概念は，面の曲率の正確な類似物である．

一般に，2 次元面の線素は

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2+2g_{12}\,dx\,dy+g_{22}(dy)^2 \qquad (7.6.1)$$

と書ける．この表式では表面上は 3 つの関数 g_{ab} が関係しているが，座標変換に対する不変量は，座標の関数 1 つだけで指定することができる．座標系の選択に自由度があり，たとえば直交するように選ぶこ

とができる．座標変換で2つの関数が使えるので，3つの関数 g_{ab} に2つの条件を課すことができるのである．特に

1. $g_{12} = 0$
2. $g_{22} = g_{11}$

というように選ぶことが常に可能である．

つまり，2次元面での幾何学的測定について調べるには，線素の最も一般的な形として

$$(ds)^2 = f(x,y)\bigl((dx)^2 + (dy)^2\bigr) \qquad (7.6.2)$$

とすることができる．関数 $f(x, y)$ は，面上の各点での物差しの変化とみなすことができる．また，面の曲率を表わしていると見ることもできる．

このような幾何に正確に対応する興味深い物理的な状況が，ロバートソンの学生によって考えられた．熱い板の上で，物差しを使って測定をしている人間を考えてみよう．板の熱さは場所によって異なる．物差しは測る場所の温度によって伸び縮みする．それを表わす関数 $f(x, y)$ は，各場所の温度と，物差しの熱膨張係数によって決まる．

各点での曲率というものは，無限に小さな対象に対してなされる測定を考えた，何らかの数学的な基準によって定義しなければならない．たとえば，半径と円周の比を比較してもよい．球面の場合，この比は平面の場合と，$(\sin\theta)/\theta$ 倍だけ異なる．ただし θ は，測定された半径と球の半径の比である．円を小さくするとこの数は，1と円の面積に比例した量だけ異なり，比例係数（の 6π 倍）は球の場合 $1/R^2$ である．この数は，局所的な曲率を表わすのに適切な量であり，内部曲率，あるいは，このような考察はガウスによるものなので，球面のガウス二乗平均曲率と呼ばれる．

■ここでの R は球の半径を表わす．

他の曲面について考えることもできる．たとえば，円筒面の曲率はゼロである．円筒面は伸縮なしで平面に展開することができるので，円周と半径の比は正確に 2π でなければならない．より複雑な場合，もし面が滑らかならば，内部曲率を定義する無限小の領域では，楕円放物面か双曲放物面に見えるはずである．このような面は，2つの直交する平面上での曲率半径という，2つの長さのパラメーターによって表わされ，内部曲率はそれを使って $1/(R_1R_2)$ となる．これは楕円放物面の場合はプラスであり，双曲放物面の場合はマイナスである．球面や円筒面という特別の場合にも，この式は正しい結果を与えることがわかる．球面の場合2つの曲率半径は等しく，また円筒面は片方が無限大となる．

4次元空間の曲率も，同様な数学的な基準により定義される．しかし頭の中にこのような単純な像を描くことは望めず，直感はきかないので，解析的な方法に頼らなければならない．特殊相対論の4次元時空でさえ直感で考えることは難しい．マイナスの符号が付くので，どことどこが近いのか，感覚的に理解することが困難である．曲率がある空間はさらに大変になる．3次元空間の中に埋め込んだ2次元曲面

は，曲がった空間の簡単な例として考えられた．しかし 3 次元空間の曲率を同じように表現するには 6 次元空間に埋め込む必要があり，また 4 次元空間の場合には，10 次元空間に埋め込んで考える必要がある．時空の曲率は，面の曲率よりもかなり複雑なのである．

7.7 一般座標変換の下で不変な量の数

2 次元面では 1 つの量 $1/(R_1R_2)$ が内部曲率を表わしていたが，4 次元の場合，曲率を表わすのに 20 ほどの係数が存在する．これらの 20 の量が，テンソル $g_{\mu\nu}$ の物理的に意味のある性質を表わす．我々がすべきことは，2 次元の幾何を一つの関数 $f(x,y)$，式 (7.6.2) によって定義したように，賢い座標の選択をすることによって，テンソル $g'_{\mu\nu}$ を単純化することである．

一般に，1 点を除き，加速することによって重力場を消し去ることはできない．曲率は，各点の周りの無限小の領域で何が起こるかということによって定義しなければならないので，計量テンソル $g'_{\mu\nu}$ がどの程度単純化できるかということを調べるのが必要である．2 次元の場合の類推で，1 点の周りの空間が，その点からの距離の 2 次以上の項を除いて平坦であるように座標を選ぶことができると想像される（リーマン正規座標と呼ばれる）．つまり，曲面はそれに接する平面から，接点から測った座標について 2 次の量だけずれるので，それと類似のことが 4 次元で起こると期待するのである．

そこで，$g'_{\mu\nu}$ をある点 x_0 の周りで展開したとすると，変換によっていくつの量を指定でき，$g'_{\mu\nu}$ をどの程度簡単にできるかを考えてみよう．空間の点を x で表わし，$g'_{\mu\nu}$ の x_0 の周りのテーラー展開を

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2}g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma) + \cdots \tag{7.7.1}$$

とする．計量テンソル $g'_{\mu\nu}(x_0)$ とその微分は，規則 (7.4.8) に従って計算しなければならない．つまり

$$g'_{\alpha\beta}(x_0) = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0},$$

$$g'_{\alpha\beta,\tau} = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu,\tau}\right]_{x_0} + 2\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0},$$

$$g'_{\alpha\beta,\tau\sigma} = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu,\tau\sigma}\right]_{x_0} + 2\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\tau \partial x'^\sigma}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0} + \text{その他の項} \tag{7.7.2}$$

展開を 2 次まで考えた場合，$g'_{\mu\nu}$ を単純化するには変換を，式 (7.7.2) に出てくる偏微分が適当な値になるように選ばなければならない．そこで変換で以下の量を指定しよう．

1. 16 個の量 $\left[\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right]_{x_0}$

2.　40 個の量　$\left[\dfrac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]_{x_0}$

3.　80 個の量　$\left[\dfrac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma}\right]_{x_0}$

(7.7.3)

(微分の順序は問題にならないことに注意.) その一方で，計量テンソルとその微分の値の数は，

1.　10 個の $g'_{\mu\nu}(x_0)$
2.　40 個の 1 階微分 $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$　(7.7.4)
3.　100 個の 2 階微分 $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$

まず，$g'_{\mu\nu}(x_0)=\eta_{\mu\nu}$ となるようにしよう．これには 1 次微分 $[\partial x^\mu/\partial x'^\alpha]_{x_0}$ のみが関係しており，10 個の条件を満たすために 16 個の任意定数が使える．これは明らかに可能であり，6 つの自由度が残る．この 6 つは特殊相対論，つまりローレンツ変換と回転の 6 つのパラメーター(速度ベクトル，および回転の軸と角度)であり，$\eta_{\mu\nu}$ は変えない．次に，40 個の

$$\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]_{x_0}$$

を使って，40 個すべての $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ を正確に消すことができる．$g_{\mu\nu}$ の微分は，$\int ds$ が最小という運動方程式に登場する．すでに述べたように，ある 1 点でそれらを消すことができるということは，重力は時空のある 1 点では，適切な加速によって除去することができるということを意味する．

結局，変換によって除去することができない，$g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$ という形の 2 階微分の，20 個の線形結合が残る．潮汐力の詳細を表わすのは，これらの量である．次の章ではこれら 20 個の量を，任意の座標系で与えられたテンソル $g_{\mu\nu}$ によって表現することを考えよう．

第 8 章

8.1 非直交座標系でのテンソルの成分の変換

これまでの議論では，直交座標系を扱ってきたので，テンソル成分の和について簡略形を使うことが可能であった．特に，繰り返される添字に対する和の法則を使ってきた．

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - A_3 B_3 - A_2 B_2 - A_1 B_1 \qquad (8.1.1)$$

直交座標系では，この和は不変なスカラー量である．その特別な場合が，特殊相対論で固有時間を定義する式

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \qquad (8.1.2)$$

である．現在議論している，加速や歪みや伸縮がある一般的な座標系では，固有時間は座標の変位と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の積，式 (7.4.7) によって定義される．スカラー不変量を作るには，式 (8.1.1) よりも複雑な規則を使うことになる．

座標の変位は，ベクトルの反変成分と呼ばれるものの典型である．通常の記法では dx^μ のように，添字を上付きで書く．重要なのは座標系を変えたときの，反変ベクトル成分の変換則である．座標の変位に対しては，これは

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \qquad (8.1.3)$$

となる．

ベクトル関数を，座標系を変化させたときに座標の変位と同じ変換をする，4 つの数として定義する．

$$A^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x) \qquad (8.1.4)$$

この A^μ を，ベクトルの反変成分と呼ぶ．この定義は，高階のテンソルに容易に拡張することができる．たとえばテンソルは，2 つのベクトルの外積と同じ変換をする関数である．つまり

$$T^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \qquad (8.1.5)$$

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の変換則と定義 (8.1.5) を比べると，$g_{\mu\nu}$ では微分の上下が逆なので，同じタイプの量ではないことがわかる．しかし我々は以前，$g_{\mu\nu}$ の逆行列を定義した．

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^\nu{}_\beta \qquad (8.1.6)$$

この逆行列が反変テンソルになることを証明するのは，難しいことで

はない．したがって，その添字を上付きで書いたのは適切なことであった．

同様に，和

$$g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}dx^{\nu} = (ds)^2 \tag{8.1.7}$$

および

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu}$$

がスカラー不変量であることを証明するのも難しいことではない．座標変換をすると，正しい微分と上下逆になった微分とが出てくるので，その積を足し合わせればクロネッカー・デルタになるからである．

このことは，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を使って，異なる変換則をもつ新しい種類のベクトル成分が定義できることを示唆する．

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad A_{\beta} = g_{\alpha\beta}A^{\alpha},\\ &\text{(b)}\quad A_{\beta}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}}A_{\mu}(x)\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

これをベクトルの共変成分と呼ぼう．和をとって作られるスカラー量は，

$$A_{\beta}B^{\beta} \tag{8.1.9}$$

である．以下の議論では，添字が上付きか下付きかに注意することが重要である．一般に，上付きの添字と下付きの添字の積の和をとることのみが許される．たとえば，特殊相対論の直交座標系では，固有時間は

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{8.1.10}$$

となる．テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり，対角成分は (1, −1, −1, −1) である．

たとえば電気力学のベクトル・ポテンシャルのように，ベクトル量が物理の問題で登場する場合には，共変ベクトルか反変ベクトルのいずれかとして定義される．しかし計量テンソルを使うことによって，一方から他方を作ることができる．$g_{\mu\nu}$ かその逆行列を掛けることによって，添字を自由自在に上げ下げすることができる．部分的に共変で部分的に反変のテンソルを作ることも可能である．それは，上付きの添字と下付きの添字を混ぜて表わされる．順番が曖昧にならないように添字を書くことが重要である．

$$g_{\mu\alpha}T^{\mu\nu} = T_{\alpha}{}^{\nu} \tag{8.1.11}$$

対称テンソル $g_{\mu\nu}$ や $g^{\mu\nu}$ という特殊な場合には，添字を上げ下げすればクロネッカー・デルタになるだけなので，この規則を緩めることができる．

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{8.1.12}$$

ここではこれらの関係式の証明の復習に，時間をかけることはしない．何年も前からある話であるし，多くの本に書かれている．これらの関係は，計算を非常に容易にするこれらの記法を発明したアインシュタインが利用したものであり，このような問題については，彼は信頼できる人物である．添字の位置は，変換 (8.1.3), (8.1.4), (8.1.5)，お

よび (8.1.8) を定義する微分の添字の場所に対応しているので，記憶に便利である．

ベクトルの共変成分と反変成分の間には，基本的な物理的相違はない．同じ物理的内容をもっており，違うのは表現だけである．2次元の場合には，どのように違うのか，容易に図で示すことができる．変換は無限小の変位に対して定義されているので，空間の曲がりについて気にする必要はない．問題になるのは，直交しているかいないかだけである．座標軸が直交していない場合には，物理的な変位を座標軸に射影するには2通りの方法がある．図8.1に示されているように，軸に直角に射影するか，他の軸に平行に射影するかである．$g_{\mu\nu}$ のテンソル成分が，各点での座標の直交性の有無を表わしている．

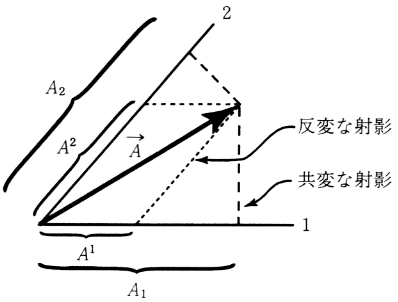


図8.1

8.2 $g_{\mu\nu}$ の不変量を決定する方程式

計量テンソルの役割をかなり理解できたので，それからどのような，座標の無限小変換に対して不変な量を作ることができるのか，調べることにしよう．

今しようとしていることは，以前ラグランジアンを作るためにしたこととまったく同じである．座標の微小な変換

$$x^\mu = x'^\mu + \zeta^\mu(x') \qquad (8.2.1)$$

をしたとする．ζ^μ は小さな量だと仮定し，ζ^μ について1次の項のみを残す．微分は

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} \qquad (8.2.2)$$

新しい $g'_{\mu\nu}$ を計算すると，次のような微分の積が出てくる．

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x'+\zeta)\left(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\left(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu}\right) \qquad (8.2.3)$$

ζ^μ について0次の項と1次の項のみを残すと

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + g_{\alpha\nu}\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x'^\mu} + g_{\mu\beta}\frac{\partial \zeta^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x'^\sigma}\zeta^\sigma \qquad (8.2.4)$$

新しい $g'_{\mu\nu}$ は，従来の $g_{\mu\nu}$ と，ζ^μ の1次の項の和である．形が不変であるべしと要求した場合に $g_{\mu\nu}$ のどのような関数が許されるのかを考

えると，第 6 章で解いた数学の問題と同じ問題になる．この問題は，保存するエネルギー運動量テンソルを導くラグランジアンを求める問題と同じである．

つまり，同じ方程式を導く，そして同じ内容をもつ物理的観点が，複数ある．我々は，重力のラグランジアンを求めるときに現われる変換が，純粋に幾何学的問題の解答にも現われることを発見した．したがって，物理的に見える基準と幾何学的に見える基準とは，ある部分で同等であると推測される．発散が恒等的にゼロになることを要求した以前のアプローチの一貫性は，我々が現在していることと同等でなければならない．$g_{\mu\nu}$ から作られる不変量の物理的意味は何なのだろうか．

運動方程式は変分原理

$$\delta\int ds=\delta\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}}=0 \tag{8.2.5}$$

から導くことができる．これは微分の平方根の意味を明確にするために，パラメーター u を導入することによって行なうことができる．

$$\int du\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{du}\frac{dx^{\nu}}{du}} \tag{8.2.6}$$

変分を行なうと，次の(測地線の)方程式が求まる．

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2}=-\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}\frac{dx^{\sigma}}{ds}\frac{dx^{\tau}}{ds} \tag{8.2.7}$$

ただし

$$\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}=g^{\mu\nu}[\sigma\tau,\nu]$$

任意の変換によって計量テンソルを変えてもこの方程式の形は変わらないので，問題の物理を含むものは，$g_{\mu\nu}$ の不変量でなければならない．

8.3　空間が真に平坦であるという仮定について

これらのさまざまなアプローチが同じ結果を与えるということから，何を学ぶべきなのだろうか．我々が以前にもっていた観点は，空間は特殊相対論の空間として記述できるというものであった．便宜上，これをガリレイ空間と呼ぼう．このガリレイ空間には，物差しの長さや時計の進み方を変える効果をもつ重力場 $h_{\mu\nu}$ がある．したがって実験結果を語る際には，実際の測定のスケールつまり物理的なスケールと，理論を記述するスケールつまりガリレイ的スケールを区別しなければならない．

■厳密には，これは「ガリレイ空間」という言葉の通常の用法ではない．

ポイントは，物理的な座標が，常に同じ結果を再現しなければならないということである．理論を最初に記述する際には，測定はガリレイ空間でなされると仮定するのが便利かもしれない．しかし現実の効果を予測してみると，ガリレイ空間には，特別の意味はないことがわかる．

他人の選択した座標がガリレイ的に見えないからといって，ばかげているとか奇妙だとか主張することはできない．また，ガリレイ空間にこだわり，曲率を場に帰したとしても，間違いではない．そのときに奇妙に見えるのは，我々の空間である．どのような物理的結果に対しても，最初に位置をどのような表示にしたかにかかわらず，同じ答が求まる．したがって最初から，ガリレイ空間を使わずに物理を記述することができたとしたら，原理的な進歩となるだろう．常に，現実の測定をする物理的空間を直接扱うのである．

再び，熱い板の上で現実の物差しで測定をする人のことを考えてみよう．熱い領域や冷たい領域に行くと，物差しの長さは変わる．しかしこの言い方に意味があるのは，温度から影響を受けずに距離を測定できる手段，つまり光があるからである．もし光での測定によって，板上に「真にユークリッド的」な座標系を刻み込んだとすれば，板上の人間は温度の場，つまり場所による物差しの長さの変化を表わす場を決めることができる．もし我々が彼をだまし，板上に歪んだ座標系を刻んで，しかもこれはユークリッド的であると彼に言ったとすれば，彼が測定する温度場は異なったものになるだろう．しかし，勝手な座標を刻み込んでも，彼がすべて自分で行なう実際の測定結果を変えることはできない．我々が指定した座標系を使って彼が奇妙な温度場を得たとしても，距離を決めるのに物差しの長さだけを使ったとすれば，常に同じ答を得ることになる．

光による測定は熱に影響されないと仮定したので，何がユークリッド的で何がユークリッド的でないか，熱い板の場合には明らかである．しかし重力の場合は，影響を受けないスケールはない．ガリレイ座標系を定義でき，重力の影響を受けない「光」といったものはない．つまりすべての座標系は同等であり，時計の進み方や長さのスケールを説明するのに必要な場の値が異なるだけである．実際の測定のみに関心を限定すれば，最初に使った座標系は見えなくなる．座標系は単に記録用に使うラベルに過ぎないからである．

ガリレイ座標系，つまりユークリッド座標系に意味がある場合が 1 つある．重力がない極限，熱い板の温度が一様な極限である．その場合，実際の距離とユークリッド的な距離は同じ幾何を表わす．曲がった座標から出発したとしても，ある座標変換によって，場を使わずに測定を説明できることがわかるだろう．この単純化は重要な結論ではあるが，ユークリッド的な記述に特別な有効性があるということではない．ある特定の物理的な単純さをもつ，ある特定の状況に対応しているに過ぎない．

もしすべての場所で力がゼロだとすれば，Γ はすべての場所でゼロでなければならない．もし力がすべての場所でゼロでないとすれば，「最良」の座標系というものを定義することはできない．しかし局所的に力をゼロとすることはできる(等価原理である)．

8.4　重力理論への異なるアプローチの間の関係について

場による解釈と幾何学的解釈双方が可能であるという点が，重力理論の特徴の 1 つである．これらはまさに同じ理論の 2 つの側面なので，金星の科学者は重力の場の理論を完成させた後で，結局は幾何学的見方を見つけただろうとも考えられる．しかし確信はもてない．帰納的な論理とは，説明することができないものだからである．少ししか知らないときに，より多く理解するためにどのように進めばよいのか，説明することなどできない．

いずれにしろ現実には，スピン 2 の場はこの幾何学的意味をもっている．これは，簡単には説明できない驚くべきことである．幾何学的解釈は，物理にとって実際には必要ではなく，本質的なことでもない．一致自体が，何らかのゲージ不変性を表わしていると理解すべきなのかもしれない．重力のこの 2 つの観点の間の関係は，変換の下での場の理論の一般的性質に関係する何らかの第 3 の観点を議論した後に明らかになるのかもしれない．この観点は後でもっと深く展開するが，ここでは，重力が幾何でも場でもありえる理由を理解するのに取るべき方向について，何らかの感覚を得るための議論をする．

ゲージ不変性について考えてみよう．電気力学でよく言われるように，これはベクトル・ポテンシャル A を，

$$A' = A + \nabla X \tag{8.4.1}$$

によって新しいベクトル・ポテンシャル A' に置き換えたときに，場の方程式も物理的効果も変わらないことを意味する．これは，振幅の位相不変性に関係している．量子力学の振幅がどう変わるのかを見てみよう．確率の計算に

$$\phi' = e^{ia}\phi$$

を使ったとしても，物理的な予測は何も変わらない．一般に，定数 a には意味がない．では，定数 a の代わりに，空間内の各点で変化する関数 X を使ったらどうなるだろうか．方程式は常に，ϕ' の勾配

$$\nabla\phi' = e^{iX}(\nabla\phi + i\phi\nabla X) \tag{8.4.2}$$

を含む．しかし演算子 $(\nabla - iA')$ は，位相しか変えない．

$$(\nabla - iA')\phi' = e^{iX}(\nabla - iA)\phi \tag{8.4.3}$$

つまり，もしこのように結合するベクトル場が存在したとすれば，方程式は場 ϕ の時空に依存する位相変換の下で不変である．

■ 現在では，この理論は原子核相互作用ではなくクォークの相互作用などに適用されている．

ヤン-ミルズ・ベクトル場理論は，原子核相互作用のアイソスピンに対する不変性にこの変換のアイデアを拡張する試みである．陽子の振幅を ϕ とすると，

$$\phi' = e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}}\phi \tag{8.4.4}$$

は，部分的に陽子で部分的に中性子である状態を表わす．もし $\vec{a}$ がアイソスピン空間での定ベクトルだとすると，アイソスピン変換に対する核力の不変性とは，新しい ϕ' がすべての点で，ϕ と同様に振る

舞うことを意味する．ヤンとミルズの提案は，「位置に依存する」位相の変更 ($\vec{a}\rightarrow\vec{X}$) が方程式には何の変化ももたらさないように，ラグランジアンにベクトル場を加えるべきであるということであった．

■ $\vec{X}$ は，位置に依存するベクトルを表わす．

このようなアイデアが重力とどのように関係するだろうか．物理の方程式は，

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \tag{8.4.5}$$

のように座標を定数だけ変位させても不変である．これを形式的に位相やアイソスピンの変換に似せるには，運動量表示を使い，平行移動の演算子を

$$\exp(ip_{\mu}a^{\mu})$$

とする．すると空間に依存する変位 ($a^{\mu}\rightarrow\zeta^{\mu}$) を認めたときに，物理の方程式をどのようにして不変にするかを調べることができる．より完全なラグランジアンを求めなければならない．そこで必要な新しい項は，まさに重力場のラグランジアンである．つまり重力とは，座標変換に対するゲージ不変性に対応する場なのである．

8.5　接空間からみた曲率

アインシュタインのように幾何学的に考えれば，半径と円周の極限として，曲率などの量を求めることができる．この問題があまり複雑ではないことを示すために，実際に実行してみよう．何をしているのかはわかっているので，一般座標変換をすることができる．いくつの微分があるのかは，すでに議論した．16 個の微分 ($\partial x^{\alpha}/\partial x'^{\nu}$) を調節することによって

$$g^{0}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{8.5.1}$$

とすることができると言った．また 40 個の 2 階微分 ($\partial^2 x^{\alpha}/\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}$) を調節して，$g^{0}_{\mu\nu}$ のすべての 1 階微分をゼロにすることができる．したがって，80 個の調節可能な 3 階微分と，$g_{\mu\nu}$ の 100 個の 2 階微分がある．つまり幾何学的定義をもつのは，2 階微分の 20 個の線形結合になる．それは座標変換によって消去することはできない．我々が探しているのは，最初の $g_{\mu\nu}$ を使ったこれら 20 個の量の表式である．我々はいわば逆にたどることによって，3 段階でこの計算をする．第 1 に 1 階と 2 階の微分は(ある 1 点で，リーマン正規座標に変換することによって)，$g^{0}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ および $g^{0}_{\mu\nu,\sigma}=0$ となるようにすでに調節したと仮定し，20 個の量に対する表式を見つける．そしてその後で，実際に任意の最初の座標から出発してこれらの調節をどのようにしたのかを考え，最初の $g_{\mu\nu}$ を使った 20 個の量の表式を得る．

まず最初に，ある点での接空間の座標による，幾何学的に定義可能な量を議論しよう．我々が 4 次元でしていることは，2 次元の次の状況に類似したものである．2 次元では曲がった空間とは曲面であり，図 8.2 のように，ある点での面の形を，そこでの接平面から見た形に対比させる．曲面の最初に与えられた座標は一般には直交しておらず，

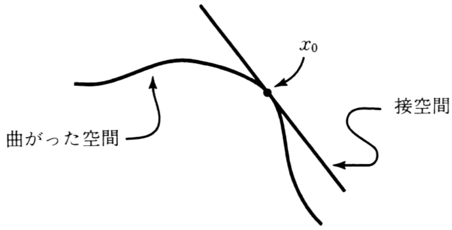


図 8.2

不変量 $1/(R_1R_2)$ に基づく，形状の最も単純な表現を与えるような適切な方向を向いていない．第一段階は，最初に与えられた座標によるこの内部曲率の決定である．

問題の点での曲がった空間の，平らな空間からのずれを表わすのは，2 階以上の微分である．曲率とはまさに，曲面と接平面との，局所的なずれの尺度である．それは，その点での空間の本質的な性質の表現である．座標の 1 階，2 階および 3 階の微分のみが関係するので

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha}+\frac{1}{2}a^{\alpha}{}_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}+\frac{1}{6}b^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}x'^{\mu}x'^{\nu}x'^{\sigma} \qquad (8.5.2)$$

とすれば，十分に一般的な座標変換となる．我々の任務は，20 個の意味のある組合せを選びだすことである，1 階微分は

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\alpha}_{\ \mu}+a^{\alpha}{}_{\mu\nu}x'^{\nu}+\frac{1}{2}b^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma}x'^{\nu}x'^{\sigma} \qquad (8.5.3)$$

接空間では計量テンソルは

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}x'^{\sigma}x'^{\tau}g^{0'}{}_{\alpha\beta,\sigma\tau}, \\ g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}x^{\sigma}x^{\tau}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau} \end{aligned} \qquad (8.5.4)$$

とすれば十分に一般的な形となる．上付き添字 0 は，接点 x_0 で計算された量であることを示す．接空間で任意の 2 つの座標系を考え，双方で表式が変わらないことを要求すると，適切な不変な線形結合が求まる．2 つの空間は接しているので，座標は 2 次以上でのみ異なる．つまり

$$a^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0 \qquad (8.5.5)$$

後は，一方の変換式を他方の変換式に代入すればよい．微分に式 (8.5.3) を使って，$g_{\mu\nu}$ の変換則に代入すると，

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}+\eta_{\alpha\nu}b^{\nu}_{\beta\sigma\tau}+\eta_{\beta\nu}b^{\nu}_{\alpha\sigma\tau})x'^{\sigma}x'^{\tau} \qquad (8.5.6)$$

となる．したがって g の 2 階微分の関係は

$$g'^{0}{}_{\alpha\beta,\sigma\tau} = g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}+b_{\alpha\beta\sigma\tau}+b_{\beta\alpha\sigma\tau} \qquad (8.5.7)$$

ただし

$$b_{\alpha\beta\sigma\tau} \equiv \eta_{\alpha\nu}b^{\nu}{}_{\beta\sigma\tau}$$

この表式を使って，b を含まない g の線形結合を求めたい．b は後ろ

の3つの添字について完全対称だが，$g_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ は $\sigma\tau$ についてのみ対称であることを利用する．添字を交換し（$\beta\leftrightarrow\sigma$），引算をすると

$$g'^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}-g'^{0}_{\alpha\sigma,\beta\tau}-g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}+g^{0}_{\alpha\sigma,\beta\tau} = b_{\beta\alpha\sigma\tau}-b_{\sigma\alpha\beta\tau} \qquad (8.5.8)$$

この表式の右辺は添字（$\alpha\tau$）について対称だが，左辺は必ずしもそうではない．したがって反対称化（$\alpha-\tau$）すると，ダッシュ付きか否かで変わらない，次の表式を得る．

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}(g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}-g^{0}_{\alpha\sigma,\beta\tau}-g^{0}_{\tau\beta,\sigma\alpha}+g^{0}_{\tau\sigma,\beta\alpha}) \qquad (8.5.9)$$

これが，我々が探していた20個の線形結合である．この量はテンソルではない．十分に一般的でもない．場がゼロになる点でのみ定義されている．これはある意味では，重力テンソルの本質的部分であり，変換で除去することはできない．純粋の潮汐力を表わしている．このようにして我々は，曲率を見つけるための明確な処方をもった．第1に，$g_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu}$ にし，その1階微分をゼロにするための（リーマン正規座標への）変換を見付ける．次に変換された $g_{\mu\nu}$ を使うと，曲率は式(8.5.9)によって与えられる．これはどの座標系でも変わらない．残る問題は，$R_{\alpha\tau\beta\sigma}$ を，最初に与えた任意の座標および計量 $g_{\mu\nu}$ を使って表わすことである．

8.6　任意の座標での曲率

一般的な座標を使った曲率の表式は，段階的に行なえば最もわかりやすく求まる．次の段階として，1階微分（一般的にはゼロではない）に対する制限を取り除くが，座標は局所的に直交しているとする．$g_{\mu\nu}$ と $g'_{\mu\nu}$ の表式は，

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}+g^{0}{}_{\alpha\beta,\mu}x^{\mu}+\frac{1}{2}g^{0}{}_{\alpha\beta,\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}, \\ g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g'^{0}{}_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau} \end{aligned} \qquad (8.6.1)$$

g' は以前と同じで，1階微分がゼロである．2階微分はすでに調節したので

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha}+\frac{1}{2}a^{\alpha}{}_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} \qquad (8.6.2)$$

という型の変換だけを考えればよい．3次の項は右辺には影響しない．1階微分の表式

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}+a^{\alpha}{}_{\mu\nu}x'^{\nu} \qquad (8.6.3)$$

を，g' を g で表わす式に代入する．

$$\begin{aligned} &\eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g'^{0}{}_{\alpha\beta,\sigma\tau}x'^{\sigma}x'^{\tau} \\ &\quad = \eta_{\alpha\beta}+(g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}+a_{\beta\alpha\sigma}+a_{\alpha\beta\sigma})x'^{\sigma} \end{aligned}$$

$$+x'^{\sigma}x'^{\tau}\left[a^{\rho}{}_{\alpha\sigma}a_{\rho\beta\tau}+a^{\rho}{}_{\alpha\tau}g^{0}_{\rho\beta,\sigma}+a^{\rho}{}_{\beta\tau}g^{0}_{\rho\alpha,\sigma}+\frac{1}{2}a^{\rho}{}_{\sigma\tau}g^{0}_{\alpha\beta,\rho}+\frac{1}{2}g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}\right] \tag{8.6.4}$$

$a_{\alpha\beta\sigma}=\eta_{\alpha\mu}a^{\mu}{}_{\beta\sigma}$ である．1 階微分の項は

$$a_{\beta\alpha\sigma}+a_{\alpha\beta\sigma} = -g^{0}_{\alpha\beta,\sigma} \tag{8.6.5}$$

とするとゼロになる．この方程式を解いて，$a^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ を最初の座標系の $g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}$ で表わす必要がある．これは通常のトリックでできる．(α,σ) を交換した式を差し引き，項をまとめるなどすると，

$$a_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[g^{0}_{\sigma\alpha,\beta}+g^{0}_{\sigma\beta,\alpha}-g^{0}_{\alpha\beta,\sigma}] = -[\alpha\beta,\sigma]^{0} \tag{8.6.6}$$

と求まる．すると式 (8.6.4) より $g'^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ は，式 (8.6.6) の $a_{\sigma\alpha\beta}$ を代入すれば式 (8.6.4) の右辺の角括弧 [ ] 内の表式(の 2 倍)に等しいことがわかる．この $g'^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ を式 (8.5.9) の $g^{0}_{\alpha\beta,\sigma\tau}$ に代入すれば，もとの座標で表わされた曲率が

■以下，g^{0} をたんに g と書く．

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\sigma\tau}-g_{\alpha\sigma,\beta\tau}-g_{\tau\beta,\alpha\sigma}+g_{\tau\sigma,\alpha\beta}) \\ +[\rho\sigma,\alpha]\eta^{\rho\lambda}[\tau\beta,\lambda]-[\rho\beta,\alpha]\eta^{\rho\lambda}[\tau\sigma,\lambda] \tag{8.6.7}$$

と求まる．最後にすべきことは，最初に与えた一般的な座標を対角化することである．これは，線形変換

$$x^{\alpha} = L^{\alpha}{}_{\mu}x'^{\mu} \tag{8.6.8}$$

によってできる．

$$g'^{0}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{8.6.9}$$

と選び，他のものをすべて書き直せばよい．微分はたんに L なので

$$g'_{\mu\nu} = L^{\alpha}{}_{\mu}L^{\beta}{}_{\nu}g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \tag{8.6.10}$$

また

$$\eta^{\alpha\beta}L_{\alpha}{}^{\sigma}L_{\beta}{}^{\mu} = g^{\sigma\mu} \tag{8.6.11}$$

であることもわかる．

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} = L^{\mu}{}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{8.6.12}$$

も使う．したがって(ラテンの添字は，ダッシュ付きの座標に対応する)

$$g'_{mn,st} = L^{\sigma}{}_{s}L^{\tau}{}_{t}L^{\mu}{}_{m}L^{\nu}{}_{n}g_{\mu\nu,\sigma\tau} \tag{8.6.13}$$

$$a'_{rmn} = L^{\rho}{}_{r}L^{\mu}{}_{m}L^{\nu}{}_{n}a_{\rho\mu\nu} \tag{8.6.14}$$

$$\eta^{rq}a'_{rmn}a'_{qst} = \eta^{rq}L^{\rho}{}_{r}L^{\lambda}{}_{q}L^{\mu}{}_{m}L^{\nu}{}_{n}L^{\sigma}{}_{s}L^{\tau}{}_{t}a_{\rho\mu\nu}a_{\lambda\sigma\tau} \tag{8.6.15}$$

■ただし，R を定めた(8.6.7)の g は g' であるとして代入する．

これを R に代入すれば，R はもはや不変量ではないことがわかる．

R の最終的な表式は(式 (8.6.11) を使う)

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\sigma\tau}-g_{\alpha\sigma,\beta\tau}-g_{\tau\beta,\alpha\sigma}+g_{\tau\sigma,\alpha\beta}) \\ +[\rho\sigma,\alpha]g^{\rho\lambda}[\tau\beta,\lambda]-[\rho\beta,\alpha]g^{\rho\lambda}[\tau\sigma,\lambda] \tag{8.6.16}$$

であり，変換則は

$$R'_{mnst} = L^{\mu}{}_{m}L^{\nu}{}_{n}L^{\sigma}{}_{s}L^{\tau}{}_{t}R_{\mu\nu\sigma\tau} \tag{8.6.17}$$

8.7 曲率テンソルの性質

$R_{\mu\nu\sigma\tau}$ は不変ではないが，変換則 (8.6.17) からわかるようにテンソルである．前に主張したように，ちょうど 20 個の量を含んでいることが容易にわかる．式 (8.5.9) は，まず (α, τ) について，その後 (β, σ) について反対称化して求めた．したがって次のような関係がある．

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma} = -R_{\tau\alpha\beta\sigma} \quad (8.7.1a)$$

$$= -R_{\alpha\tau\sigma\beta} \quad (8.7.1b)$$

$$= +R_{\beta\sigma\alpha\tau} \quad (8.7.1c)$$

式 (8.5.9) は(したがって式 (8.6.16) も)，次の代数関係も満たす．

$$R_{\alpha\tau\beta\sigma}+R_{\alpha\sigma\tau\beta}+R_{\alpha\beta\sigma\tau} = 0 \quad (8.7.2)$$

ここで，独立な成分の数を数えよう．最初の添字は 2 番目とは等しくない．また 3 番目の添字は 4 番目とは等しくない．反対称な組合せのみがゼロでない．2 階反対称テンソルのゼロでない成分は 6 つである．したがって，最初の 2 つと後の 2 つの交換に対する対称性を考えなければ，36 個の成分がある．この最後の対称性，式 (8.7.1c) により，個数は (6×7)/2＝21 に減る．代数関係，式 (8.7.2) の自明でない制限は 1 つしかない．もし 2 つの添字が同じだったら，式 (8.7.1) の対称性のために式 (8.7.2) は恒等式になる．たとえば

$$R_{1\tau1\sigma}+R_{1\sigma\tau1}+R_{11\sigma\tau} = R_{1\tau1\sigma}-R_{1\tau1\sigma}+0 = 0 \quad (8.7.3)$$

したがって，この代数関係に意味があるためには，すべての添字が異ならなければならない．しかしすべての添字が異なる，つまり (1, 2, 3, 4) とすれば，式は 1 つしかない．したがって一般に，この曲率テンソル(リーマン・テンソル)の独立の成分は 20 個である．

理論の構築に必要なのはテンソルではなく，ラグランジアンに使う，完全に不変な量である．(アインシュタインはその代わりに，エネルギー運動量テンソルが，曲率テンソルから導ける他のテンソルに等しいと主張した．) 最小作用の原理には，変換に対して完全に不変な，空間全体での積分を使わなければならない．被積分関数は，スカラーでなければならない．

$$\int dx\,dy\,dz\,dt\,(\text{スカラー}) = (\text{スカラー不変量}) \quad (8.7.4)$$

このようなスカラーは，曲率テンソルの添字を上げて，縮約することによって求まる．たとえば最初の添字を上げることができる．

$$g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R^{\lambda}{}_{\tau\beta\sigma} \quad (8.7.5)$$

しかしこの時点で，最初の 2 つの添字を縮約すると，残念ながらゼロになってしまう．

$$R^{\tau}{}_{\tau\beta\sigma} \equiv 0 \quad (8.7.6)$$

そこで最初と最後の添字を縮約してテンソルの階数を減らす．

$$g^{\alpha\sigma}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = R_{\tau\beta} \quad (8.7.7)$$

(曲率テンソルから導かれる他のテンソルにも，通常同じ文字 R を使

うことに注意.） この2階のテンソル（リッチ・テンソル）は対称である．被積分関数に使うスカラー（スカラー曲率）を得るために，さらに階数を減らす．

$$g^{\alpha\sigma}g^{\tau\beta}R_{\alpha\tau\beta\sigma} = g^{\tau\beta}R^{\sigma}{}_{\tau\beta\sigma} = R^{\sigma\beta}{}_{\beta\sigma} = R \qquad (8.7.8)$$

体積要素はスカラーではないので，このスカラーの体積積分は不変量ではない．$dx\,dy\,dz\,dt$ は座標を変えると，$L_{\alpha}{}^{\mu}$ の行列式だけ変わる．したがって不変な積分は

$$\int dx\,dy\,dz\,dt\,R\sqrt{-g} \qquad (8.7.9)$$

となる．これが，真空におけるアインシュタイン-ヒルベルト作用である［Hilb 15］．

第 9 章

9.1 等価原理が要求する電気力学の修正

等価原理は，いかなる実験によっても，加速は重力と識別不可能であると主張する．特に，電磁波を観測しても識別できない．しかしここに明らかに問題がある．我々は加速している電荷は放射するという先入観をもっているが，重力場中にある電荷が放射をするとは考えない．しかしこれは，等価原理に間違いがあるからではなく，加速している電荷が放出するエネルギーの放射則

$$\frac{dW}{dt}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 \qquad (9.1.1)$$

が，誤解を招いているからである．この法則は通常，ポインティングの定理によって遠方でのエネルギーの流れを計算することによって導かれ，周期的な運動，あるいは少なくとも，時間とともに限りなく加速されることはない運動(等加速度運動などは排除される)に対してのみ当てはまる．エネルギーが「いつ」放出されるのかを述べる法則ではない．それは，放射抵抗の力$\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{a}}\right)$を調べることによってのみ，決めることができる．エネルギー損失を表わすのは，この力による仕事だからである．等加速の場合にはこの力はゼロである．一般にこの仕事は

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\vec{v}\cdot\dot{\vec{a}}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{a}) \qquad (9.1.2)$$

と表わされ，これがdW/dtに対する正しい表式である．周期的な，または限定された運動においては，最後の項の，長い時間での平均値は小さいかゼロであり(1周期で$\vec{v}\cdot\vec{a}$は元の値に戻るので，その寄与はゼロになる)，より簡単な式(9.1.1)で十分になる．

■実は，等加速でも放射するという主張もある(太田浩一氏の指摘による)．T. Fulton and F. Rohrlich, *Ann. Phys.* **9**, 999(1960)を参照．しかし，地表上は重力は一様でないので，地表上の電荷が放射するとは限らない．中性原子の場合は放射しないのかもしれない．

もちろん，通常の力学が相対性原理を満たすように修正する必要があるのと同様，重力場中ではマクスウェルの法則も修正する必要がある．マクスウェル方程式は光が直進することを予言するが，光は星に向かって落下することがわかっている．明らかに，等価原理と合致させるためには，電気力の法則に重力と電気力との相互作用を含めなければならない．

このような電気力学の修正，そして重力波の放出や受信や吸収の機構を論じるまでは，重力の理論が完成したことにはならない．

9.2 テンソルの共変微分

前章で，幾何学的な測定の議論において，空間の曲率という概念が出てくることを見た．空間を動いたときのベクトルの変化によって曲率を定義するという，より伝統的なアプローチを考えることによって，4 次元の曲率が我々の物理に対する見方にどのように影響するかを，よりよく理解することができる．再び，2 次元の世界を想像してみよう．平坦なユークリッド座標を使うと，空間全体に存在する定ベクトルは，定数成分で表現される．一般に曲がっている別の座標を使うと，定ベクトルは，各点ごとに異なる成分によって表現される．よく使われるのは極座標である．そこでは定ベクトルは

$$\begin{aligned}(A\cos\theta+B\sin\theta) &= F_r,\\ (B\cos\theta-A\sin\theta) &= F_\theta\end{aligned} \tag{9.2.1}$$

という成分で表わされる．

最初にすべきことは，ある点でのテンソルとその近くの点でのテンソルとの，物理的に意味のある差を求められる公式を作ることである．つまり，座標を任意に選ぶことによって生じる成分の変化を消去した上でのテンソルの変化を表現したい．たとえば，ある点 x^μ でのベクトルと，無限小 dx^μ だけ離れた点での別のベクトルを，一方のベクトルを変化させずに他方の点に移動することによって(正確に言えば平行移動することによって)，比較したい．

スカラー関数，つまり 1 階のテンソルに対しては，問題は何もない．通常の微分は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^\nu}=\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\sigma} \tag{9.2.2}$$

のように変換する．スカラーの微分は明らかに共変ベクトルである．しかし，ベクトルまたは高階のテンソルのただの微分はテンソルではない．その変換則は，座標の曲がりの偶然性に依存する項を含む．接空間からはどのように見えるかを考えることによって，適切な微分の形を求めてみよう．接空間は平坦なので，成分の微分は，座標の曲がりによる項を含まない．平坦な座標での微分によるベクトルの勾配はテンソルである．平坦な空間から一般的な座標に戻ることによって，任意の座標での公式が得られる．いつものように，計算には展開式を使う．(平坦な空間の座標にダッシュを付ける．)

$$\begin{aligned}x^\nu &= x'^\nu+\frac{1}{2}a^\nu{}_{\sigma\tau}x'^\sigma x'^\tau+\cdots,\\ \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} &= \delta^\nu_\mu+a^\nu{}_{\sigma\mu}x'^\sigma+\cdots\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

としよう．展開の原点近傍では，

$$A_\mu(x)=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A'_\mu(x')$$

微分は式 (9.2.3) を使って書けるので

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x') + a^\nu_{\mu\lambda} x'^\lambda A'_\nu(x') + \cdots \qquad (9.2.4)$$

一般の座標でのこの表式の微分を計算し，それを原点で評価すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma}\right)_0 &= \frac{\partial}{\partial x'^\tau}\Big(A'_\mu(x') + a^\nu_{\mu\lambda} x'^\lambda A'_\nu(x')\Big)_0 \left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\sigma}\right)_0 \\ &= \frac{\partial A'_\mu(x')}{\partial x'^\sigma} + a^\nu_{\mu\sigma} A'_\nu(x')\end{aligned} \qquad (9.2.5)$$

この量は原点で評価されているので，x' について 1 次の項はすべてゼロである．結局，「平坦な空間」での微分に対応する，一般の座標で表わした公式を得た．

$$\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\sigma} - a^\nu_{\mu\sigma} A_\nu\right] = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\sigma} \qquad (9.2.6)$$

$a^\nu_{\mu\sigma}$ を計量テンソルで表わせば，真の微分に対する公式が求まる．この量はテンソルであり，ベクトル A_τ の共変微分と呼ばれる．単なる微分と区別するために，共変微分を表わすのにセミコロンを使おう．

$$A_{\mu;\tau} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma \qquad (9.2.7)$$

この量がテンソルであることを示すのは，面倒だが複雑ではない．必要なのは，すべての座標を平坦な空間に変換し，微分を実際に計算し，変換則を調べることである．反変ベクトルの微分の規則も同様である．

$$A^\mu{}_{;\sigma} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} A^\tau \qquad (9.2.8)$$

これを最も簡単に証明するには，式 (9.2.7) から出発し，添字の上げ下げに計量テンソルを使えばよい．計量テンソルの組み替えにより，Γ の符号が逆転する．多くの添字をもつテンソルの共変微分を計算する規則は

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho;\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\nu}{}_\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} T^{\sigma\nu}{}_\rho + \Gamma^\nu_{\lambda\sigma} T^{\mu\sigma}{}_\rho - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} T^{\mu\nu}{}_\sigma \qquad (9.2.9)$$

つまり各添字に対して，Γ とテンソルの積が 1 つずつ加わる．この公式は簡単に記憶できる．添字の上げ下げの仕方は一通りしかありえず，覚えなければならないのは，上付きの場合は $+$，下付きの場合は $-$ を付けることだけである．

この変換の最もなじみ深い例が，球座標でのベクトルの回転の公式である．これらの公式は常に，通常の微分とベクトルの成分の値との積を含む．

共変微分についての有用な関係式がある．容易に示すことができるように，計量テンソルの共変微分はゼロである．

$$g^{\mu\nu}{}_{;\sigma} = 0 \qquad (9.2.10)$$

したがって，積の共変微分に対して，次の規則が成り立つ．

$$(A^\mu B^\nu)_{;\sigma} = A^\mu B^\nu{}_{;\sigma} + A^\mu{}_{;\sigma} B^\nu \qquad (9.2.11)$$

テンソル量に関するこのような等式を証明するためには，常に，証明

のしやすい座標系を選んでよい．テンソルの数学的性質により，ある座標系で証明されたテンソルの等式は，いかなる座標系でも真である．最後の等式は，平坦な接空間で容易に証明できる．共変微分は，この空間では通常の微分に等しい．

曲率があると，2 回目の共変微分は 1 回目とは交換しない．式(9.2.9) を繰り返し使うことによって，2 階微分を具体的に計算することができる．まず

$$A^{\mu}{}_{;\sigma;\tau}=[A^{\mu}{}_{;\sigma}]_{;\tau}=\frac{\partial[A^{\mu}{}_{;\sigma}]}{\partial x^{\tau}}+\Gamma^{\mu}_{\tau\lambda}[A^{\lambda}{}_{;\sigma}]-\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}[A^{\mu}{}_{;\lambda}] \quad (9.2.12)$$

であり，もう 1 度微分すると

$$A^{\mu}{}_{;\sigma;\tau}=\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\tau}\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial}{\partial x^{\tau}}(\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}A^{\lambda})+\Gamma^{\mu}_{\tau\lambda}\left(\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}+\Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}A^{\rho}\right)-\Gamma^{\lambda}_{\sigma\tau}\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}A^{\rho}\right) \quad (9.2.13)$$

となる．共変微分の順番の非可換性は，差を計算することにより

$$A^{\mu}{}_{;\sigma\tau}-A^{\mu}{}_{;\tau\sigma}=[\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho,\tau}-\Gamma^{\mu}_{\tau\rho,\sigma}+\Gamma^{\mu}_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}-\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\tau}]A^{\rho} \quad (9.2.14)$$

となる．左辺はテンソルの差なので，A^{ρ} に掛かる因子はテンソルでなければならない．これはまさに曲率テンソルであり，

$$A^{\mu}{}_{;\sigma\tau}-A^{\mu}{}_{;\tau\sigma}=R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}A^{\rho} \quad (9.2.15)$$

と書ける．

9.3 ベクトルの平行移動

2 階の共変微分を結び付けるものとして曲率テンソルが現われるという事実は，曲率の，新たな有用な幾何学的描像を得るヒントとなる．2 階微分の非可換性は，まず σ に沿って，それから τ に沿って動かしたときと，逆にまず τ に沿って，それから σ に沿って動かしたときとの，ベクトルの差の極限を表わしている．もし座標が平坦だったら，定ベクトルに対しては差はない．曲がった空間の場合，これらの移動を逆の順番に行なうと結果は異なる．物理的な記述をする際のこの考察の重要性は，成分の接空間での微分がゼロのベクトル場という以外に，「真に一定の」ベクトル場を定義する物理的な方法がないことに気づけば明らかだ．

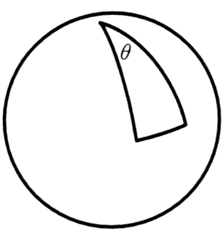


図 9.1

面上でのベクトルの平行移動に曲率が関わることは，球面を考えるとよくわかる．図 9.1 に示されているように，小さなベクトルを北極から赤道に下ろし，それから赤道に沿って角度 θ 移動し，北極に戻す．ベクトルは常に平行にずらす．この場合は，常に真南を向かせる．北極に戻ったとき，このベクトルは角度 θ だけ回転している．面の曲率 K は，無限小の閉じた経路を通ったときのベクトルの回転角によって定義される．面の場合

$$\delta\theta=(\text{囲まれた面積})\cdot K \quad (9.3.1)$$

球面上の三角形の場合，この角度は，三角形の内角の和の過剰分(180 度からの)に正確に等しい．球面では曲率 K は，単に $1/R^2$ である．

多次元の面の曲率の一般化された定義は，閉じた経路に沿って平行移動したときのベクトルの変化を使って与えられる．面上の経路の方向は2つの座標に依存しているので，曲率は4階のテンソルになる．3次元空間では，ある点から外へ「動径」方向に，最短の経路(測地線)に沿って測ったときの，ある決まった距離だけ離れた点の集合として，球面を定義することができる．するとさまざまな方向の曲率の成分は，その球面の大円の長さの 2π からのずれの割合に対応する．

高次元空間に埋め込んだ簡単な空間を使って視覚化するには，計量テンソルの各独立成分ごとに1次元を加える必要がある．2次元空間の場合，計量テンソルの成分は3つなので，3次元で十分である．3次元の場合，計量テンソルは6つの独立成分があり，4次元の場合は10の独立成分がある．

経路を回ったときのベクトルの変化による曲率の成分の定義は，曲率のすべての性質は再現しない円周の欠損による定義よりも，一般的である．

2階の共変微分との関係は，連続したベクトルの平行移動を考えることによって，容易に計算できる．図9.2の経路を回ったとき，一周後のベクトルの違いは

$$\delta^2 A^\mu = R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} A^\nu \triangle_1 x^\sigma \triangle_2 x^\tau \qquad (9.3.2)$$

でなければならない．曲率は (σ,τ) について反対称なテンソルなので，積 $\triangle_1 x^\sigma \triangle_2 x^\tau$ は，$1/2(\triangle_1 x^\sigma \triangle_2 x^\tau - \triangle_1 x^\tau \triangle_2 x^\sigma)$ に置き換えることができる．これは平行四辺形の面積ベクトルの成分の半分である．このテンソルの添字の意味を説明するのは難しくない．ベクトルを $(\sigma\tau)$ 面の小さなループに沿って回すと，そのベクトルの μ 成分は，他の成分 A^ν の和 $R^\mu{}_{\nu\tau\sigma} A^\nu$ と，ループの面積に比例する量だけ変化する．

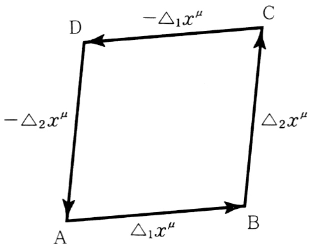


図9.2

ベクトルの平行移動について多くのことを，その概念を数学的に明確にしないまま議論してきた．より直観的には，矢の先端と尻を，直線，つまり測地線に沿って，同じ幅だけ動かすことを意味する．数学的な定義は，測地線の方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \qquad (9.3.3)$$

を考えることによって理解できるだろう．明らかにベクトル (dx^μ/ds) は，「物理的な」直線である測地線に沿った接線速度 Δt^μ を表わしている．2階微分 (d^2x^μ/ds^2) は，時間間隔 Δs でのこの速度の変化を表わす．

$$\Delta s\left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}\right) = \Delta t^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\sigma} t^\nu \Delta x^\sigma \qquad (9.3.4)$$

変化は，ベクトル自体 t^ν，そして変位 Δx^σ に比例する．平行移動の定義もこれと同じである．つまり，もし

$$A'^\mu = A^\mu + \delta A^\mu$$

ただし

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\sigma\nu} A^\sigma \Delta x^\nu \qquad (9.3.5)$$

であれば，A'^{μ} は A^{μ} の平行移動の結果であるということができる．

1 組のベクトルを閉じたループに沿って一周平行移動したとき，ベクトル間の関係は変わらないことは，容易に示せる．ただし 1 組のベクトルによって定義される空間は，ループを回ったときに回転し，これだけが変位によって引き起こされる変化である．証明には，任意のスカラー

$$B^{\mu}A^{\nu}g_{\mu\nu} \tag{9.3.6}$$

が変化しないことを示せばよい．これは，ベクトルの長さ，そしてベクトル間の角度が変わらないことを意味する．したがって許される変化は，空間全体の回転のみである．

空間のトポロジー的性質は，局所的な曲率だけでは完全に決まらない．たとえば，空間を平行移動したとき，ベクトルの長さとベクトル間の角度は保存されると主張した．しかし，閉じたループが大きかったとき，回転に加えて反転が起きないという保証はない．そのような反転の 2 次元の例(つまり方向付け不可能な面)が，メビウスの輪である(図 9.3)．メビウスの輪の中心線に対して，1 つのベクトルを平行に，他方を垂直にし，図 9.3 の垂直な点線の左から一周させる．ベクトルは元には戻らない．この面のねじれのため，ベクトルは単なる回転ではなく，反転をする．

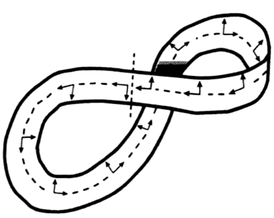


図 9.3

ベクトルの平行移動という概念を定義したので，図 9.2 の経路 ABCD に沿って回ったときの曲率テンソルの公式を求めることができる．無限小の各変位でのベクトルの変化は，クリストッフェル記号 Γ で表わされる．しかしこの変化は (AB) のときと (CD) のときとは正確に同じではないので，変位は互いに逆方向であるが，ベクトルは元に戻ったときに同じ値にはならない．クリストッフェル記号の微分に関係してくることが理解できる．計算をすれば，式 (9.2.14) の表式が求まる．

曲率テンソル自体は，ビアンキ恒等式

$$R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta;\gamma}+R^{\mu}{}_{\sigma\beta\gamma;\alpha}+R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\beta}=0 \tag{9.3.7}$$

を満足することが示せる．

ビアンキ恒等式の幾何学的意味は，私にはすぐにはわからない．電気力学には，次元の数を除き同一の形に書くことができるなじみ深い方程式がある．場のテンソルはベクトル・ポテンシャルによって

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tag{9.3.8}$$

と書ける．つまり $F_{\mu\nu}$ は，あるベクトルの回転である．しかし，$F_{\mu\nu}$ が回転であるという表現に含まれている $F_{\mu\nu}$ の性質は，

$$F_{\mu\nu,\sigma}+F_{\nu\sigma,\mu}+F_{\sigma\mu,\nu}=0 \tag{9.3.9}$$

という，ビアンキ恒等式に似た形をした恒等式で表現できる．回転の性質はストークスの定理によって，経路積分に関係させることができる．

$$\oint_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int (\mathrm{curl}\,\vec{G})\cdot d\vec{S} \qquad (9.3.10)$$

右辺の積分は，経路 Γ で囲まれた面上の面積分である．

重力の場合，この関係は次のようになる．経路積分は，ベクトルを閉じたループに沿って平行移動したときの変化を表わす．この変化は，Γ を境界とする 2 次元超曲面上の積分に関係させることができるだろう．この関係の証明は，たとえば図 9.4 に図示されているような，無限小の区画に分けた有限な面を考える，ストークスの定理の証明をまねればよい．無限小の各区画の寄与の和が，経路積分に同等であることを示せる．この状況の高次元版として見れば，空間の曲率の性質を説明する上でのビアンキ恒等式の役割を，よりよく理解できるだろう．

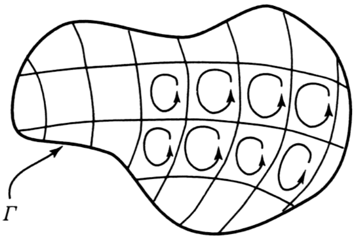


図 9.4

9.4　曲率と物質との関係

幾何学的解釈の中で，重力場の効果が曲率テンソル $R^{\mu}{}_{\nu\sigma\tau}$ を使ってどのように説明できるかを見てきた．最後にすべきことは，曲率テンソルを，重力の源である物質とエネルギーに関連付けることである．まず，曲率テンソルの最初の添字と最後の添字を縮約してリッチ・テンソルを得る．

$$R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\sigma\mu} \qquad (9.4.1)$$

これが，曲率テンソルを 1 回縮約する唯一の方法である．次のヒントは，共変微分の縮約，つまりエネルギー運動量テンソルの共変的発散はゼロでなければならないという，エネルギーと運動量の一般化された保存則である．

共変微分の縮約が恒等的にゼロになる，リッチ・テンソルを含む形を探そう．答はビアンキ恒等式，式 (9.3.7) を 2 回縮約すると得られる．添字 $(\mu\beta)$ を縮約すると，リッチ・テンソルを含む表式になる．

$$R_{\sigma\alpha;\gamma} - R_{\sigma\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\sigma\gamma\alpha;\mu} = 0 \qquad (9.4.2)$$

次に $(\sigma\alpha)$ を縮約すると

$$R_{;\gamma} - R^{\sigma}{}_{\gamma;\sigma} - R^{\mu}{}_{\gamma;\mu} = 0 \qquad (9.4.3)$$

となる．したがって，共変的発散がゼロになるテンソルは

$$\left(R^{\mu}{}_{\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\gamma} R\right)_{;\mu} = 0 \qquad (9.4.4)$$

である．この量がエネルギー運動量テンソルになるというのが，アインシュタインの推測であった．このことをアインシュタインの形にするために，添字の 1 つを上げて 2 階反変テンソルを作る．

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \lambda^2 T^{\mu\nu} \\ G^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 0 \end{aligned} \qquad (9.4.5)$$

式 (9.4.5) がすべての出発点である，完全なアインシュタインによる重力の法則である．$G^{\mu\nu}$ はしばしば，アインシュタイン・テンソルと呼ばれる．

エネルギー運動量テンソルと曲率テンソルとの間の関係を見ると，興味深い疑問が生じる．もし空間に物質もエネルギーもなければ，空間の形状は平坦，つまり特殊相対論のミンコフスキー計量になるというのが，我々の直感かもしれない．しかし，

$$\text{空間全体で}\quad T_{\mu\nu}=0\quad\text{だが}\quad R^{\sigma}_{\ \rho\tau\nu}\neq 0 \tag{9.4.6}$$

という解を見つけることが可能である．最も興味深い解は，A. Taub によるものである．これは時間に依存しないので興味深い．この問題には他の解もあるだろう．源がないのに重力が生じるのかという疑問が生じる．

この答は，電気力学での類似の疑問の答に似ているかもしれない．時間依存性があれば，源がなくても方程式は，重力場がある解をもつ（つまり伝播する波）．しかし，すべての観測された放射はそれを放出した電荷から生じたと仮定しても，物理的な困難はない．たとえばポテンシャル

$$\begin{aligned}\phi &= x,\\ \phi &= x^2+y^2-2z^2\end{aligned} \tag{9.4.7}$$

をもつような，静的な場を作ることも可能である．これには発散がないので，源はない．しかしこのような場は，式 (9.4.7) が成り立つ，ある領域外に存在する電荷によるものであるというのが，通常の解釈である．そして解が成り立つ領域を広げると，解を可能にするのに必要な外部の電荷の量もますます大きくなる．

A. Taub の解を詳しく調べたわけではないが，状況はこのようなものだろうと私は想像する．物質のない曲率を説明するには，小さな領域でははっきりした物理的解釈をもつ解を考え，この領域を無限に大きくしなければならない．代償として，増加する必要な「外部」の物質の説明を，無限に遅らすことになる．

第 10 章

10.1　重力場の方程式

我々は，ベクトルを空間内で動かしたときに何が起きたかによって定義される，曲率テンソルというテンソルを見つけた．これはテンソルなので，共変な方程式を書き下すときに使う量を作るのに使うことができる．しかし，単に共変な方程式を書くだけでは，物理は得られない．方程式と現実の物質の世界との関連を指定しなければならない．アインシュタインのしたことは，この関連が何であるかを推測したことである．より基本的な原理からこの関連を推定する方法はない．可能な推測にはそれぞれ，それに特徴的な性質がともなう．したがって後の人が，その選択こそが唯一であるとするような基準を勝手に仮定することも可能だ．しかしこれはごまかしである．

重力はエネルギー密度に結合しており，相対論でのエネルギー密度は 2 階テンソルの (44) 成分なので，方程式には 2 階テンソルが必要となるというのが，有用な物理的なヒントである．曲率は 4 階テンソルなので，1 回縮約してリッチ・テンソルを使う．エネルギー運動量テンソルが単にリッチ・テンソルに等しい，$\lambda^2 T_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}$ というのが，アインシュタインの最初の推測であった．しかし，他の可能性もある．リッチ・テンソルに，スカラー曲率(リッチ・テンソルの縮約)に比例するテンソルを加えることができる．これが，アインシュタインが最終的に選んだものである．

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \lambda^2 T_{\mu\nu} \qquad (10.1.1)$$

この選択のほうが望ましい大きな理由がある．式 (10.1.1) の共変的発散を計算すると，恒等的にゼロになる．これは，エネルギー保存則が単に，式 (10.1.1) の形の結果であることを意味する．もしエネルギー運動量テンソルが単にリッチ・テンソルに等しいとすると，エネルギー保存則は物理的な仮定となり，より多くの情報をもたらし，結局は制限を強くすることになる．式 (10.1.1) の形を選べば，計量テンソルは固定されない．一般的な座標の変換を表わす 4 つの関数に対応して，計量には 4 つの関数を選ぶ自由があるが，エネルギー保存則は恒等式なので，この 4 つの関数は真に任意である．

アインシュタインの選択は，自然界にどの程度合うだろうか．$T_{\mu\nu}$ はどのように求まり，方程式や曲率の意味は何なのだろうか．これら

の疑問に答えるために，しばらくこの方程式を調べてみよう．まず最初は，他の物理との，そして変分原理との関係を考える．

作用原理を相対論的に書くためには，スカラー不変量の積分が必要である．我々は重力場の作用を

$$S_g = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x\, R\sqrt{-g} \qquad (10.1.2)$$

とする．以下では，$d^4x = dxdydzdt$ と書く．R はスカラーであり $\sqrt{-g}d^4x$ もスカラーなので，作用 S_g はスカラーである．$\sqrt{-g}d^4x$ がスカラーであることは，固有時間がスカラー不変量であることを考えることによって示すことができる．

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \qquad (10.1.3)$$

$g_{\mu\nu}$ は対称テンソルなので，回転によって対角化することができる．つまり

$$(ds)^2 = D(dt)^2 - C(dz)^2 - B(dy)^2 - A(dx)^2 \qquad (10.1.4)$$

これから，体積要素 d^4x が不変量でないことがわかる．不変な体積要素は

$$\sqrt{ABCD}\,dx'dy'dz'dt' = \sqrt{-g'}d^4x' \qquad (10.1.5)$$

ただし，$g' = \mathrm{Det}\,g'_{\mu\nu}$ である．直交変換の下では $d^4x = d^4x'$ かつ $\mathrm{Det}\,g_{\mu\nu} = \mathrm{Det}\,g'_{\mu\nu}$ なので，不変体積要素の一般的表式は

$$\sqrt{-g}\,d^4x \qquad (10.1.6)$$

$\sqrt{-g}$ という量はスカラー密度である．これは，座標変換の下での変化が，変換のヤコビアンを掛けることによって求まることを意味する．

$$\sqrt{-g'} = \left|\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right|\sqrt{-g} \qquad (10.1.7)$$

S_g を $g_{\mu\nu}$ で変分すると，曲率テンソルが出てくる．

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \qquad (10.1.8)$$

これが，完全な理論の作用の重力部分として，R の積分を使うことができる理由である．

このようにエネルギー運動量テンソルは変分原理によって導かれるので，その共変的発散は必ずゼロになることを指摘しておこう（最初にこのことを強調したのは，エディントンだったと思う）．我々はこの関係を，逆の方向から見てきた．発散のないテンソルから出発したので，変分原理を推測することができたのである．ここで提示した証明は厳密ではない．問題なのは事実であって証明ではないので，厳密さにはこだわらない．物理は証明なしで進むことができるが，事実なしでは進めない．証明は，よい練習問題という意味では有用である．事実が正しいとすれば，証明は計算を正しくできるかどうかの問題になる．

もし汎関数

$$S_g = \int d^4x\, \Sigma[g_{\mu\nu}] \qquad (10.1.8')$$

が座標変換に対して不変だったら，S_g の変分の共変的発散は恒等的にゼロであることを証明したい．ダッシュ付きの座標への無限小変換 $x^\mu \to x'^\mu$

$$x^\mu = x'^\mu + h^\mu(x') \tag{10.1.9}$$

の下では，$g_{\mu\nu}$ の変化は

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x') + h^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x') + h^\alpha{}_{,\mu} g_{\nu\alpha}(x') + h^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}(x') \tag{10.1.10}$$

積分変数のダッシュを省略すると，新しい座標では不変な作用は

$$\begin{aligned} S_g &= \int d^4x\, \Sigma[g'_{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x\, \Sigma[g_{\mu\nu}] + \int d^4x \frac{\delta\Sigma}{\delta g_{\mu\nu}}(h^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha} + h^\alpha{}_{,\mu} g_{\nu\alpha} + h^\alpha g_{\mu\nu,\alpha}) \end{aligned} \tag{10.1.11}$$

この表式の第 2 項を部分積分して，関数 Σ の汎関数微分を含む表式を得る．Σ の性質から，任意の h^α に対してこの作用の変化がゼロでなければならないことがわかっているので

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\delta\Sigma}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\nu\alpha}\right] - \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma}{\delta g_{\mu\nu}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{10.1.12}$$

となる．$2\lambda^2 S_g$ の $g_{\mu\nu}$ での変分を $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ と書こう．

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = 2\lambda^2 \frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{10.1.13}$$

$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソル密度である．この定義を使うと式 (10.1.12) は

$$(g_{\alpha\mu}\mathcal{G}^{\mu\nu})_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha}\mathcal{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{10.1.14}$$

となる．これは，$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ の共変的発散がゼロ

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{10.1.15}$$

であることと同等である．

この同等性を示すには，後々のためにここに集めておくいくつかの公式を使うと便利である．まずクリストッフェル記号 (Γ) の縮約を計算する．定義より

$$\Gamma^\mu_{\epsilon\mu} = g^{\mu\sigma}[\mu\epsilon,\sigma] = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}[g_{\sigma\mu,\epsilon} + g_{\sigma\epsilon,\mu} - g_{\mu\epsilon,\sigma}] \tag{10.1.16}$$

$g_{\mu\nu}$ は対称なので，第 2 項と第 3 項は相殺する．残りの項は，逆行列 $g^{\mu\nu}$ に $g_{\mu\nu}$ の微分を掛けたものである．行列式に対するよく知られた定理から，行列 $g_{\mu\nu}$ の余因子 $M^{\mu\nu}$ は，逆行列 $g^{\mu\nu}$ と

$$g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}/g \tag{10.1.17}$$

の関係にあり，

$$g_{,\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} M^{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\lambda} g^{\mu\nu} g \tag{10.1.18}$$

したがって

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} = [\log(-g)]_{,\lambda} \tag{10.1.19}$$

であり，クリストッフェル記号の縮約は

$$\Gamma^{\mu}_{\epsilon\mu} = [\log\sqrt{-g}]_{,\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\epsilon} \qquad (10.1.20)$$

共変的発散についての他の有用な公式をあげよう．スカラー関数の場合は，共変微分は通常の微分と同じである．

$$\phi_{;\nu} = \phi_{,\nu} \qquad (10.1.21)$$

反変ベクトルの共変的発散は，

$$A^{\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\nu})_{,\nu} \qquad (10.1.22)$$

共変的回転は，通常の回転に等しい．

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \qquad (10.1.23)$$

2 階テンソルに対しては，対称性によって答は異なる．反対称テンソルの場合は

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})_{,\nu}, \qquad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \text{ のとき} \quad (10.1.24a)$$

対称テンソルの場合は

$$T^{\nu}{}_{\mu;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(T^{\nu}{}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}T^{\alpha\beta}, \qquad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \text{ のとき}$$
$$(10.1.24b)$$

これらの公式を使うと，式 (10.1.14) と式 (10.1.15) が同等であることを導くのは，容易である．したがって作用の不変性から，自動的に発散のないテンソル密度が導かれることがわかる．計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の共変微分はゼロなので，共変微分 $(\sqrt{-g})_{;\lambda}$ もゼロになる．（通常の微分 $(\sqrt{-g})_{,\lambda}$ とは違うことに注意．$\sqrt{-g}$ はスカラー密度であってスカラーではない．）テンソル密度 $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ に付随したテンソルも発散はない．

■ 一般に，座標系を変化させたときに(8.1.5)などの変換の他に $\sqrt{-g}$ の比を掛けなければいけない量に密度という言葉を付ける．

$$G^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu}/\sqrt{-g}, \qquad G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad (10.1.25)$$

この関連で，細かなことだが微妙な点について，明らかにしておきたい．第 6 章で，式 (10.1.2) と同じ形の関数方程式(たとえば式 (6.2.3))を扱った．これらの方程式の解は実際はテンソルではなく，テンソル密度である．エネルギー運動量テンソル密度 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は，方程式

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\alpha\beta} \qquad (10.1.26)$$

を満たす．ただし

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}T^{\mu\nu}$$

しかしエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は，次の方程式を満たす．

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2g}g_{,\alpha}T^{\mu\alpha} \qquad (10.1.27)$$

10.2 重力場中の古典的粒子の作用

次に，物理の一般法則，つまり重力場ばかりでなく物質も含む法則をどのように書き下すか議論する．これは，最小作用の原理から導かれると仮定しよう．数学的な言い方では，作用の変分がゼロ

$$\delta S = \delta \int d^4x\, \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, A_\mu, \cdots] = 0 \qquad (10.2.1)$$

ということである．ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，重力のテンソル場 $g_{\mu\nu}$，電磁場 A_μ，そして物質がスカラーならばスカラーの物質場 ϕ など，さまざまな場を含んでいる．この作用をさまざまな場で変分すると，対応する場の伝播の方程式が得られる．この作用の一部はすでに書き下した．物質場 ϕ や電磁場 A^μ，そしてその他のすべての場に依存する残りの部分を S_m と書こう．

$$S = S_g + S_m = -\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x \sqrt{-g}R + S_m \qquad (10.2.2)$$

の $g_{\mu\nu}$ についての変分をとると，次の方程式を得る．

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2}\sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right] = -\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (10.2.3)$$

物質のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が重力場の源だとするならば，その密度 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は S_m の変分でなければならない．

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad (10.2.4)$$

ここで $T^{\mu\nu}$ の例が必要となる．もし他の物理の原理によって $T^{\mu\nu}$ が計算できないとしたら，重力場が他の物体にどのように関係しているかわからないので，重力理論も成り立たなくなる．

電磁気学にも見られる無矛盾条件に似た条件がいくつかある．マクスウェル方程式を解くには，電流の形が必要である．それは任意の流れではなく，保存していなければならない．意味のある保存電流は，物理の他の問題を，オームの法則，フックの法則，シュレーディンガー方程式など何らかの独立の法則に従って解くことにより得られる．これらの他の法則がない場合には，電磁場の理論は役に立たず，意味のないものとなる．

重力の場合，事情はより複雑である．テンソル $T^{\mu\nu}$ は物質の運動を含んでおり，オームの法則やフックの法則など物質が従う法則が必要だが，$T^{\mu\nu}$ は重力場 $g^{\mu\nu}$ も含んでおり，電磁気学の場合よりも問題が絡み合っている．一般に真空以外には，絡み合った問題全体を解かない限り，無矛盾な $T^{\mu\nu}$ を書き下すことはできない．計量テンソルが特別の形をした場合を除き，具体的に与えた $T^{\mu\nu}$ は問題の解とはならない．完全な相対論的解は，座標の特定の選択や曲率とは無関係に成り立たなければならない．しかし非常に単純な問題でさえも，適切な $T^{\mu\nu}$ をどのように書き下せばよいのかわからない．回転している棒を表わす $T^{\mu\nu}$ をどのように表現したらよいのかわからないので，重力波の放射を正確に計算することはできない．潮汐力や地球の弾性が重力場を大きく変えるので，地球と月からなるシステムの $T^{\mu\nu}$ を計算することもできない．地球が剛体であると仮定すると，方程式は矛盾する．地球が点だと仮定すると，特異点が生じて方程式には解がない．しかし方程式が解けるか否かにかかわらず，地球など，ある固さをもった

物質の塊が，他の重さや固さをもった月などの物体の回りを回転するのは明らかである．

重力理論はこの点に問題を抱えている．方程式の片方は美しく幾何学的だが，他方はそうではない．フックの法則やその他の法則など，物質を支配する法則のさまざまな美しくない部分を含んでいる．美しくも幾何学的でもない．多くの物理学者は方程式の片方の美しさに魅せられているが，他方のみにくさと，そして物理的な解答がないことを無視している．

我々は，作用 S_m の形を推測することを学ばなければならない．出発点として，古典極限を考えるのが有用であろう．正しい古典的作用が書ければ，任意の座標変換に対して不変になるようにその公式を一般化するのは，通常はそれほど難しくない．そのような一般化された公式を導く便利な方法は，局所的に落下(自由落下)している接した座標系に戻り，不変になるように $g_{\mu\nu}$ や $R^{\mu\nu}$ という因子の加え方を考えることである．たとえば，力がない場合の自由粒子の作用は

$$S_m = -\frac{m_0}{2}\int ds \frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz_\mu}{ds} \qquad (10.2.5)$$

この例から，推測の手順がわかる．この手順は通常は有用なものであった．まず平坦な座標で式を書き，曲線座標に移り，$g_{\mu\nu}$ がどのように現われるかを見る．どのような一般形が，この平坦な空間での式に移行するかは，明らかである場合が多い．$z^\mu(s)$ が，自由落下している粒子の軌道であるならば，作用中の項 S_m は

$$S_m = -\frac{m_0}{2}\int d^4x\, ds\, \delta^4(x-z(s))g_{\mu\nu}\frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds} \qquad (10.2.6)$$

エネルギー運動量テンソル密度 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は，この S_m の $g_{\mu\nu}$ での変分によって求まり

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = m_0\int ds\, \delta^4(x-z(s))\frac{dz^\mu}{ds}\frac{dz^\nu}{ds} \qquad (10.2.7)$$

電磁気学での結果との類似は非常にはっきりしているので，この結果は予想されることである．この $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ には不整合の問題はない．不変な形から出発したので，この $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は共変的発散条件を満たす．

運動方程式と，発散のないエネルギー運動量テンソルとの間の関係を調べることは興味深い．作用 S_m を書くとき，我々は実質的に，粒子は測地線に沿って動くと主張した．その結果，エネルギー運動量テンソル密度は発散がゼロとなる．我々はその逆を知りたい．時空の糸状の領域でのみ $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ がゼロでないとしよう．すると，非常に近距離から見たときの粒子の球対称性と同等なものを仮定さえすれば，その糸状の領域は測地線であることがわかる．ヒントは，通常の $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ の発散を $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ 自体に結び付ける条件から出発し，部分積分を行なって，体積積分を表面積分に直すことである．

$$\int d^4x\, \mathcal{T}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\, g_{\alpha\beta,\mu}\mathcal{T}^{\alpha\beta} \qquad (10.2.8)$$

もし$\mathcal{T}^{\mu\nu}$が，ある糸状の領域以外では値をもっていないとしたら，表面積分への寄与は，その糸と表面との交点以外では消える．もしこの表面が一定時刻内にあるとすれば，交点では，粒子の「前」と「後」の運動量になる．この結果を微分形に変換すると，結局，運動は測地線の方程式

$$\frac{d^2z^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dz^\alpha}{ds}\frac{dz^\beta}{ds}=0 \qquad (10.2.9)$$

に従うことになる．

■ (10.2.8)の積分を2つの時刻間，そして全空間での積分だとし，左辺を2つの表面積分(t=一定)に直す．

この議論により，アインシュタイン方程式は，物体の運動と重力場を同時に決めるという主張が出てくる．しかしこの主張は誤解を招くものであり，見かけほど素晴らしい主張でもない．もし，他のすべてのものから離れた自由粒子があったとすると，エネルギーと運動量の保存則がその運動を完全に決める．重力理論では，自由落下する粒子が自由粒子に相当するので，エネルギー保存則がその運動を完全に決めるのに十分である．しかし通常の物理の状況は，それほど単純ではない．重力と1つの粒子以外のものがあるとき，運動方程式はエネルギーと運動量の保存則だけからは導かれない．電気力学では電荷の保存則は，マクスウェル方程式のどの解でも成り立たなければならない．しかしそれだけでは，電荷の運動，それが作る電磁場，そして互いに及ぼし合う力に対する方程式を作ることはできない．同様に重力理論ではエネルギーと運動量の保存則が成り立つが，それだけでは惑星や月の運動を決めるのには十分でない．それらは質点ではないし，重力場中のその振る舞いを説明するには，エネルギー保存則以外の物理の法則が必要である．

10.3　重力場中の物質場の作用

次に，量子論への移行の準備をしよう．スカラー粒子がスカラー場ϕによって表わされるとすれば，平坦な座標でのその作用は

$$S_m=\frac{1}{2}\int d^4x\,(\phi_{,\nu}\phi^{,\nu}-m^2\phi^2) \qquad (10.3.1)$$

曲線座標への一般化は容易であり，

$$S_m=\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-m^2\phi^2) \qquad (10.3.2)$$

この形は明らかに任意の座標変換に対して不変であり，平坦な空間では元の形にもどる．しかし，場ϕについて2次で，曲率テンソルを含む，完全に不変な別の形の項も存在する．これらの項はすべて，平坦な空間ではゼロになる．たとえば，以下のような項があるかもしれない．

$$-\alpha\int d^4x\sqrt{-g}R\phi^2+\beta\int d^4x\sqrt{-g}\,(R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \qquad (10.3.3)$$

作用は一意的ではない．平坦な空間での結果を導きだすためには，最

初に書いたほうの項はなければならない．しかし，式 (10. 3. 3) のような項を含めるか含めないかの基準となるような，潮汐力に関する実験的証拠はない．物理学者ができる唯一のことは，ある形を，「より単純」であるという理由で選択し，他の複雑な可能性は排除し，どのような内容の理論になるのかを調べることだろう．ある意味では微分は単なる場よりも複雑なので，場に 2 つ，そして $R^{\mu\nu}$ に 2 つの合計 4 つの微分を含む β 項は，複雑である．一方 α 項は，計量場 $g_{\mu\nu}$ に対する微分 2 つだけである．しかし，複雑さを曖昧さなしに定義することは難しい．部分積分により，微分を一方から他方へ移すことができる．ある出発点からは明らかである単純さは，他の出発点での単純さには対応しない．量子力学をシュレーディンガー方程式から始めることに慣れているとすれば，最も単純な作用は $\alpha=0$ のものだろう．しかし，経路積分の量子力学から出発したとすれば，最も単純な作用は $\alpha=1/6$ だと思われる．これらはそれぞれの観点から，最も単純な選択に見える．私は α を決定する満足できる方法を知らない．スカラー場の作用は一意的ではないというのが，私の印象である*.

■ $\alpha=1/6$ のとき，共形不変性という対称性が成り立つ．

式 (10. 3. 3) の β 項のような項は，粒子が，局所的な曲率を感じるだけの広い領域の重力場を感じられるかどうかに関係している．粒子の構造が無限に小さなものだとすれば，曲率を感じることはできない．しかし動くときに，その位置の回りでらせん状の運動をするとすれば，局所的な曲率を含む項があってもよいだろう．

電気力学の場合に，異なる出発点が，知らず知らずのうちに異なる回答をもたらす例をあげよう．ミニマルな(最小の)電磁的相互作用の原理とは，ラグランジアンでの置き換え

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right) \tag{10.3.4}$$

を意味する．この置き換えをする前のラグランジアンの積分を

$$S = \int dV \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi - \int dV \bar{\psi} m\psi + \epsilon \int dV \bar{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi \tag{10.3.5}$$

としよう．最後の項は恒等的にゼロなので，通常は書かない．そしてまさに恒等的にゼロだという理由から，それを入れるか否かについての厳格な規則は存在しない．しかし電磁気を含めるために式 (10. 3. 4) によって微分の置き換えをすると，その結果は同じではない．新しい項

$$\epsilon\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} \tag{10.3.6}$$

ただし

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

が生じる．この項は，パウリが発見した異常磁気モーメントを表わす．(以上の議論は，ヴェンツェルが最初に私に指摘した．)

---

* 水素原子のスペクトラムに関係する現代的な観点については，[Klei 89] 参照.

スピン1の粒子の電気力学は，異常四重極モーメントによっても複雑にすることができる．明らかに単純なラグランジアンというものはないので，論文では，さまざまな異常四重極モーメントに対応するさまざまな理論で計算をしなければならない．

我々の重力理論でも状況は似ている．粒子は通常の質量によるものの他に，異常慣性モーメントをもっているかもしれない．

電磁気ではスピン0の粒子に対しては，このような曖昧さは現われない．スピン1/2の場合に初めて登場する．一方，重力では，この困難はスカラー粒子という最も単純な場合にも現われる．この困難には解答はなく，さまざまな理論(異なるα)が可能であることを認識しなければならない．

重力場中の粒子の運動は，作用を場ϕで変分することによって求まる方程式で表わされる．量子力学への移行の方法に依存して，最も単純な作用というものは異なる．したがって，多くの異なる問題に対する解答が同時に単純になるということが起きない限り，どれがより単純であるかを言うことができない．異なる問題に対しては，単純化のため，あるいは発散の除去のために，異なるαの値が必要である．$\alpha=0$とするのは，ある種の計算では最初の労力が少ないという意味でしか，単純ではない．どのようなαの値でも，何らかの問題で何らかの困難を引き起こすので，絶対的な単純さというものはない．

物質場ϕの運動方程式の導出に進もう．式(10.3.2)から出発し，逆行列と，行列式の平方根の変分の公式

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}, \qquad \delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \quad (10.3.7)$$

を使うと，$\mathcal{T}^{\mu\nu}$に対する次の表式が得られる．

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\phi_{;\alpha}\phi^{;\alpha} - m^2\phi^2)$$
$$-\alpha\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\phi^2 - 4\alpha\phi\phi_{,\beta}\sqrt{-g}\frac{\delta R}{\delta g_{\mu\nu,\beta}} \quad (10.3.8)$$

次に場ϕについて変分しそれをゼロとすると，クライン-ゴルドン方程式に類似したものが求まる．

$$(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\nu})_{,\mu} + \sqrt{-g}m^2\phi + 2\alpha R\sqrt{-g}\phi = 0 \quad (10.3.9)$$

スカラー密度$\sqrt{-g}$で割ってテンソルの方程式を求めると

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\nu})_{,\mu} + m^2\phi + 2\alpha R\phi = 0 \quad (10.3.10)$$

式(10.1.20)と式(10.1.21)を使えば，これは

$$\phi_{;\ \mu}^{\ \mu} + (m^2 + 2\alpha R)\phi = 0 \quad (10.3.11)$$

となる．クライン-ゴルドン方程式との関係は，$\alpha=0$の場合を考えればわかる．通常のダランベルシアンが，その共変形に置き替わっただけである．

以上により，具体的な理論が求まった．物質の運動，そして重力源

が指定された．上記のテンソルの共変的発散がゼロであることを確かめるのは容易である．必要ならば場の方程式を使えばよい．したがって，すべてのつじつまがあっている．テンソルの発散がゼロであり，これを出発点とすることができる．より完全な理論を作るには，知られている他のすべての場を表わすように，作用に必要な項を加える．まず平坦な空間で知られている作用を書き，何らかの基準の下で最も単純な不変な形を選ぶ．作用が不変であるという要請から，場の方程式は共変になる．知られているすべての物理法則は共変形に書けるので，これは含めることができる場に対する制限にならない．微分形の法則はこの性質をもっている．微分方程式として書かれた法則は，容易に共変形にすることができる．接空間での法則は知られている形と同じであると仮定し，その上で座標を回したり延ばしたりする．最終的な方程式は，場の微分と，計量テンソルの 2 つまでの微分を含む．

まず微分形で，それから共変形ですべての法則を表わせば，たとえば星の中の物質の運動を計算するためにこの理論を使うことができる．考慮されるプロセスは，吸収の法則や散乱の法則などで表わされるかもしれない．エネルギー保存則を破る法則を使うのは許されない．たとえば，生成されるニュートリノを忘れることはできない．ニュートリノは星から出ていくとき，重力ポテンシャルによってエネルギーを失う．このこと，そしてそのエネルギー密度の重力場への影響を無視しては，整合した理論を作ることはできない．したがって，有限な平均自由行程をもつ拡散積分方程式では十分ではなく，微分形の完全な法則によって，伝播粒子の運動を追わなければならない．

後々の便宜のために，計量テンソルを使った場の作用の被積分関数を書いておこう．以前の表式は，計量テンソルの組み合わせで定義されているので簡単に見えるが，以下の形はもっと役に立つことが多い．

$$
\begin{aligned}
-R\sqrt{-g} &= -\frac{\sqrt{-g}}{4}g_{\nu\lambda,\sigma}g_{\mu\rho,\tau}(g^{\nu\lambda}g^{\sigma\tau}g^{\mu\rho}-g^{\nu\mu}g^{\lambda\rho}g^{\sigma\tau}+2g^{\nu\mu}g^{\lambda\tau}g^{\sigma\rho}-2g^{\tau\mu}g^{\rho\sigma}g^{\nu\lambda}) \\
&\quad +[\sqrt{-g}g_{\nu\sigma,\mu}(g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma})]_{,\rho} \qquad (10.3.12)
\end{aligned}
$$

最後の項は発散であり，積分すると作用ではゼロになるので，しばしば完全に忘れてしまうことができる．多くの問題では，第 1 項(H と書く)の積分として作用を表わせば十分であり

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\lambda^2}\delta\int d^4x\,H$$

ただし

$$H=\sqrt{-g}g^{\mu\nu}[\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}] \qquad (10.3.13)$$

アインシュタインの観点での理論がわかったので，量子論を作る準備ができた．理論は，金星人の観点を議論していたときよりも完全になっている．すべての次数で正しい物質との相互作用を含む，完全なラグランジアンがわかっている．重力場とスカラー場のみを含んでいる宇宙を考えると，結合定数での展開

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu} \qquad (10.3.14)$$

をすることによって，場の理論が求まる．ラグランジアンでは，2次の項は伝播関数に対応し，2つの ϕ と1つの h の積，あるいは2つの ϕ と3つの h の積は，図10.1に示されているダイアグラムに対応する．このようにして我々は幾何学的な観点から出発し，物質の運動に対する量子論的振幅を計算する処方に到達した．

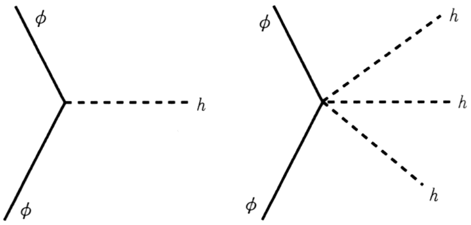


図10.1

これからは，古典的物体の運動や宇宙論的問題を議論するには古典理論を使い，重力波の放出を計算するには量子論を使う．そして量子論が問題を引き起こすことを説明した後で，重力に対する第3の見方を提出する．

重力場の作用が $\Lambda \int d^4x\sqrt{-g}$ という項を含まないのかと，考える人もいるかもしれない．これは，宇宙の体積に比例する積分であり，おそらく定数である．この項があると重力場の方程式は，重力子が質量をもち，また宇宙的な発生源をもつ形になる．このような項を導入するのは，つじつまが合った理論にはなるが，非常に長距離での重力の観測によればあまり意味がない．これがあるときの運動方程式は

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \lambda^2 T_{\mu\nu} \qquad (10.3.15)$$

定数 Λ は「宇宙定数」と呼ばれている．アインシュタインは閉じた宇宙を好み，この定数に，閉じた宇宙の定常解が可能になるような値を与えた．後に彼はこのことを，「大失敗」だったと評した．もしこれをゼロとしていたら，彼は宇宙が膨張（または収縮）していなければならないと結論づけていただろう．ハッブルが，遠方の銀河は遠ざかっており宇宙は膨張していることを発見したのは，後のことであった．アインシュタインの宇宙論に対するこの変更が導入されて以来，宇宙論は，宇宙定数の値を決定するという問題に悩まされてきた．私は，アインシュタインの後悔に同意し，$\Lambda=0$ が一番もっともらしいと考える．

■現在の宇宙論では，宇宙初期には $\Lambda \neq 0$ であった可能性が検討されており，今の宇宙でも，極微だが有限な Λ が存在する可能性がある．

第11章

11.1 球対称な星の近傍での曲率

物理的に興味がある問題の，アインシュタイン方程式の実際の解を見つけることに，話題を移そう．ニュートンの重力ではうまく説明できない，重力に関する観測例は非常に少ないので，2つの解だけを考える．1つは，(光の屈曲と，水星の近日点移動を正しく説明するのに必要な)星の近傍での解である．そしてもう1つは，質量がほぼ一様に分布するケースを扱うもので，宇宙のモデルを考えるときに重要になる．

球対称であることを仮定すると，計量テンソルは以下の形になると予想される．つまり固有時間の二乗に対して

$$(ds)^2 = A(dt)^2 + B\,dr\,dt - C(dr)^2 - D\big((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\big)r^2 \tag{11.1.1}$$

記号 A, B, C, D は，座標のうち (t, r) には依存するかもしれないが，(θ, ϕ) には依存しない関数を表わす．この式で，物質の運動が放射状(r 方向)の場合の動的な解も表わすことができる．

新しい座標を選ぶことによって，未知関数の数を減らすことができる．たとえば，座標 r のスケールを

$$r' = \sqrt{D(r,t)}\,r \tag{11.1.2}$$

と変えることで，r' と dr' を使った $(ds)^2$ の表式は，もとの表式と同じ形ではあるが，その中での D は厳密に $D=1$ となる．つまり $D=1$ としても一般性を失わない．

時間のスケールも変えることで，さらに単純化できる．

$$t' = t'(t,r) \tag{11.1.3}$$

この置き換えによって新しい関数が出てくるが，それを $dr\,dt'$ の項の係数がゼロとなるように選ぶことができる．つまり，$B=0$ としても一般性を失わない．

A と C を使わず，習慣では次のように定義される新しい関数，ν と λ を使う．

$$A = e^{\nu}, \qquad C = e^{\lambda} \tag{11.1.4}$$

(シュワルツシルトの記法である)．計量テンソルは対角的であり，添字 $(1,2,3,4)$ を座標 (r,θ,ϕ,t) に対応させると，計量テンソルは

$$g_{44} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta \tag{11.1.5}$$

となる．テンソル $g^{\mu\nu}$ は対角的なので，逆テンソル $g_{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ の各成分の逆数である．具体的には

$$g^{44} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -1/r^2, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \tag{11.1.6}$$

これらを使って曲率テンソルの計算をすることができる．しかしクリストッフェル記号には多くの微分があり，和をとる回数も多いので，単純だが長々とした計算になる．

計算の結果，曲率テンソルの各成分は ν と λ，およびその，t と r での微分を使って表わすことができる．表現を簡略化するために，微分を表わすのにダッシュとドットを使う．

$$\nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}, \quad \dot{\nu} = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \cdots \tag{11.1.7}$$

具体的な形は，次のようになる．

$$\begin{aligned}
R^{42}{}_{41} &= -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\lambda'\nu'\right) + e^{-\nu}\left(\frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\nu}\right) \\
R^{42}{}_{42} &= R^{43}{}_{43} = -\frac{1}{2r}\nu' e^{-\lambda} \\
R^{21}{}_{21} &= R^{31}{}_{31} = \frac{1}{2r}\lambda' e^{-\lambda} \\
R^{32}{}_{32} &= -\frac{1}{r^2}(e^{-\lambda} - 1) \\
R^{42}{}_{12} &= R^{43}{}_{13} = -\frac{1}{2r}\dot{\lambda} e^{-\nu}
\end{aligned} \tag{11.1.8}$$

式 (11.1.8) に記したものから，いずれかの添字を交換しただけでは求まらない他のすべての成分はゼロになる．

11.2　物質と曲率との関係について

エネルギー運動量テンソルに関係するのは，曲率テンソルから縮約で求まるテンソルである．

$$G^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu}{}_{\nu} R \tag{11.2.1}$$

$G^{\mu}{}_{\nu}$ の成分は，$R^{\mu\nu}{}_{\sigma\tau}$ の成分の和として表わすとかなり単純な形になる．たとえば対角成分は

$$\begin{aligned}
G^{4}{}_{4} &= R^{12}{}_{12} + R^{13}{}_{13} + R^{23}{}_{23}, \\
G^{1}{}_{1} &= R^{42}{}_{42} + R^{43}{}_{43} + R^{32}{}_{32}
\end{aligned} \tag{11.2.2}$$

つまり，添字が対角的ではない $R^{\mu\nu}{}_{\sigma\tau}$ の要素の和になっている．非対角成分の形も非常に単純である．たとえば

$$\begin{aligned}
G^{4}{}_{1} &= R^{24}{}_{12} + R^{34}{}_{13}, \\
G^{2}{}_{1} &= R^{32}{}_{13} + R^{42}{}_{14}
\end{aligned} \tag{11.2.3}$$

そしてこれからの類推で，他の要素の形も書き下すことができる．

和の形の単純さから，物質分布による曲率の解釈が可能になる．我々は前に，平面での値と比較した円周または円の面積の割合を使って，二次元面の曲率を議論した．

$$\text{円周} = 2\pi r(1-\text{係数}\times\text{面積}) \qquad (11.2.4)$$

三次元世界では，円周のずれは問題の円が描かれる面に依存するが，半径 r の球面積の $4\pi r^2$ からのずれを使って，平均曲率を定義することができる．結果は，

$$\text{面積} = 4\pi r^2\left(1+\frac{1}{9}r^2R\right) \qquad (11.2.5)$$

である．R は，曲率テンソルを二回縮約して得られるスカラー量である．

和 $R^{12}{}_{12}+R^{23}{}_{23}+R^{13}{}_{13}$，つまり（エネルギー運動量テンソルの 44 成分に等しい）テンソル G^4_4 に概念的意味を与えることによって，この考え方と重力理論とのつながりができる．

この和は，時間軸に垂直な三次元空間の平均曲率と呼ばれるものに等しい．したがって重力理論の言葉での解釈を次のように述べることができる．ある決まった表面積をもつ小さな三次元球を考える．その実際の半径は，ユークリッド幾何で計算される半径 $(\sqrt{\text{面積}/4\pi})$ よりも，その球内に存在する物質の量に比例した数だけ大きい $(r-\sqrt{\text{面積}/4\pi}=G/3c^2m_{\text{内部}})$（40 億トンに対して 1 フェルミの割合）．

この解釈は，球内の物質（エネルギー）密度である 44 成分に直接適用される．曲率テンソルのその他の成分も，どのような座標系でも同じ結果が成り立つことを要求すれば，正しく求まる．

11.3　シュワルツシルト計量，球対称な星の外部の重力場

関数 ν と λ で表わしたテンソル G^μ_ν の形は，次のようになる．

$$G^4_4 = \frac{1}{r}\lambda' e^{-\lambda}-\frac{1}{r^2}(e^{-\lambda}-1) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r(e^{-\lambda}-1))$$

$$G^1_1 = -\frac{1}{r}\nu' e^{-\lambda}-\frac{1}{r^2}(e^{-\lambda}-1)$$

$$G^4_1 = \frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-\nu}$$

$$G^1_4 = -\frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-\lambda}$$

$$G^2_2 = \frac{e^{-\lambda}}{2r}(\lambda'-\nu')-\frac{e^{-\lambda}}{4}(2\nu''+(\nu')^2-\lambda'\nu')+\frac{e^{-\nu}}{4}(2\ddot{\lambda}+(\dot{\lambda})^2-\dot{\lambda}\dot{\nu})$$

$$(11.3.1)$$

形が煩雑なのは G^2_2 だけだが，これを実際に使うことは滅多にない．重要なのは，このテンソルの発散がゼロでなければならないということである．他の成分がわかっていれば，発散がゼロだということを使

って，G^2_2 を実際に使うことを避けることができる．練習問題をあげよう．

1. 半径 b の球の内部に物質がなく，球の外部の物質分布が球対称であるときは，球の内部は平坦である ($g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$) ことを証明せよ．
2. 半径 b の球の内部のいたる所でエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ がわかっている場合，球の外部に何があろうとも（ただし球対称であることは仮定する），球の内部の物理には影響しないことを証明せよ．

球対称に分布する質量の外部の解は，$T_{\mu\nu}=0=G_{\mu\nu}$ とし，その結果として得られる微分方程式を使って求まる．

まず最初に，G^4_4 は λ にしか依存しないことに着目する．G^4_4 はゼロなのだから

$$r(e^{-\lambda}-1) = 一定 = -2m \qquad (11.3.2)$$

となる．右辺の 2 は，定数 m が星の全質量とニュートンの重力定数を掛けたものになるように，便宜上付けたものである．すべての質量を含む半径 a の領域内部に特異点がなければ，次の関係が成り立つ．

$$\int_0^a dr\, r^2 G^4_4 = 2m \qquad (11.3.3)$$

λ に時間依存性がないことは

$$G^1_4 = 0 = -\frac{1}{r}\dot{\lambda}e^{-\lambda}$$

からもわかる．最後に ν を求めなければならない．G^1_1 と G^4_4 はどちらもゼロだから等しいので

$$\nu' = -\lambda' \qquad (11.3.4)$$

となる．したがって，ν は次の形をしていなければならない．

$$\nu = -\lambda+f(t) \qquad (11.3.5)$$

ここで f は時間の任意の関数である．しかし ν は計量の $(dt)^2$ の係数の中に

$$e^{\nu}(dt)^2 = e^{-\lambda}e^{f(t)}(dt)^2$$

という形で登場するので，$\exp(f(t))$ は時間座標の尺度を変えれば消すことができる．計量テンソルの他の部分は $\lambda(r)$ にしか関係していないので，この変更によって変わることはない．結局，シュワルツシルト計量と呼ばれているものが求まった．

$$(ds)^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)(dt)^2-\frac{(dr)^2}{1-2m/r}-r^2(\sin^2\theta(d\phi)^2+(d\theta)^2) \qquad (11.3.6)$$

静的な解を求めるとはまったく仮定しなかったのに，結果が時間に依存しなくなったということは興味深い．シュワルツシルト計量が時間に依存しないのは，球対称という仮定と，エネルギー運動量テンソルがゼロの領域を考えたことの結果である．

太陽のような現実の星は，回転や，赤道での膨らみにより，完全な球対称形ではない．しかしこれらの影響は小さい．星が光を放出して

いれば外部空間のエネルギー運動量テンソルがゼロではないので，やはり補正が必要である．しかしシュワルツシルト解は太陽の状況に十分近いので，水星の近日点移動を観測の誤差内で正確に求めることができる．

11.4 シュワルツシルトの特異性

式 (11.3.6) の計量は $r=2m$ に特異性をもっている．これが物理的に問題になる，つまり意味のある特異性なのかを判断するには，これが座標系の原点から測った半径(これは座標 r とは異なる)

$$R = f(r) \tag{11.4.1}$$

という，物理的な値に対応しているのかを調べなければならない．

■原文では，singularity となっているので特異性と訳したが，現在では通常，地平線あるいは臨界半径と呼ばれる．真の特異点は $r=0$ にある．

解答は計量を別の見方から調べることによって求まる．球対称の計量の正しい表現は

$$(ds)^2 = H(R)(dt)^2 - F(R)\big((dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\big) \tag{11.4.2}$$

のような形だと考えた人もいるかもしれない．ただし

$$R^2 = x^2+y^2+z^2$$

である．シュワルツシルト計量は置き換え

$$r = R+\frac{m^2}{4R}+m \tag{11.4.3}$$

によってこの形になる．

$$(ds)^2 = \frac{(1-m/2R)^2}{(1+m/2R)^2}(dt)^2-(1+m/2R)^4\big((dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\big) \tag{11.4.4}$$

固有時間の特異性はなくなった．特異性は動径座標 r の定義の特殊性によるものであることがわかった．しかし式 (11.4.4) の計量では，$R=m/2$ ($r=2m$) という値で $(dt)^2$ の係数がゼロになる．この位置でどのような物理現象が起こるのかを調べなければならない．

その結果は，物理的に観測可能な効果ではないかもしれない．この星の質量が太陽に等しい場合，$R=m/2$ という位置が星の外部になるためには，そのすべての質量が半径 1.5 キロメートルの球面内に集中していなければならないことになる．しかし，太陽系ではこのようなことが起こらないとしても，理論の特徴としてこの臨界半径を研究する価値はある．

この位置を物理的に解釈するには，太陽の近くで起きている現象を遠方の観測者が見たときの速さを考えなければならない．前に，重力ポテンシャルが低い領域からきた光は振動数が減り，すべてのものが赤っぽく見えるという計算をした．半径 $R=m/2$ は，ポテンシャルが低すぎるので光は星から脱出することはできず，いかなる光も遠方にいる観測者に達することがないという位置に相当する．

この位置で空間の幾何学に何か異常なことが起きているかを見るために，曲率を具体的に計算すると，

$$
\begin{aligned}
R^{12}{}_{12} &= R^{13}{}_{13} = -m/r^3 \\
R^{23}{}_{23} &= 2m/r^3 \\
R^{41}{}_{41} &= 2m/r^3 \\
R^{42}{}_{42} &= R^{43}{}_{43} = -m/r^3
\end{aligned}
\qquad (11.4.5)
$$

となる．臨界半径での空間は滑らかであることがわかる．この特異性は，特別な座標系を選んだことの結果に過ぎないのだ．球面上を這っている虫の例で考えると，赤道を越えるときに空間の表現に特異性があると感じる．しかしもちろん物理的には，空間は赤道上でも，他の場所と同様に滑らかなのである．

いま導いた，曲率が $1/r^3$ に比例するという結果は非常に単純なので，簡単に導く方法があるのではないか．私はいつも単純な結果は単純な方法で導けるはずだと考える．そこで，$1/r^3$ に比例するという結果を導く幾何学的議論をしてみよう．ここでも，ある時刻での四次元時空として定義される三次元空間における，平均曲率という概念を使う．この三次元空間では，曲率は応力に似ている．応力（または角運動量）と同様に，曲率は平面上の量を定義しており，その成分は，平面を定義する二つの添字，または平面に直交する軸を定義する一つの添字によって指定することができる．つまり

$$R^{12}{}_{12} \to P^3{}_3, \quad R^{13}{}_{13} \to P^2{}_2, \quad \cdots \qquad (11.4.6)$$

のように対応がつく．次に，これらの「応力」の発散がゼロになるという要請

$$P^3{}_{3;3} + P^3{}_{1;1} + P^3{}_{2;2} = 0 \qquad (11.4.7)$$

が，ビアンキ恒等式と等価であることを示せる．つまり，問題としている空間では，「応力」は実質的な力にはならない．上式で三番目の添字は，曲率を考える平面を示している．

応力テンソルのトレースは圧力である．ここでの応力のトレースは平均曲率であり，それは物質密度になる．$1/r^3$ という振る舞いは，極座標で，圧力ゼロの場所での物理的なつり合いを要求することによって求まる．「応力」が働く面積を注意して定義しなければならない．測地線に沿って測られる物理的な面積でなければならないからである．θ_0 を小さな角度としたとき，r 一定の弧に沿っての距離を $\theta_0 r$ と定義する．一周を 2π としているので，θ_0 の測定は可能である．動径方向の応力を T，角度方向の応力を S とすれば（図 11.1 参照），$\theta_0 = (\sin(\theta)d\phi)$ としたときの体積要素 $r^2 dr\theta_0(\sin(\theta)d\phi)$ において力が釣り合うには

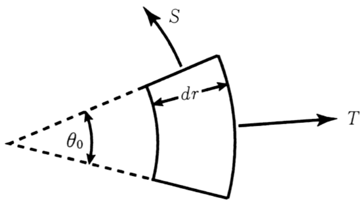


図 11.1

■ S の r 方向の成分が $S\theta_0$．それと Tr^2 の変化とが釣り合う．

$$d(Tr^2\theta_0^2) = 2Sr\theta_0^2 dr$$

でなければならない．T が r のみにしか依存しないとすれば，これから T と R を結びつける微分方程式をえる．

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2S}{r} - \frac{2T}{r} \qquad (11.4.8)$$

これは一般的に成り立つ式である．何もない空間という，ここでの状況に限れば，テンソルのトレースはゼロなので

$$\text{トレース} = T+2S = 0, \qquad T = -2S \qquad (11.4.9)$$

この場合の微分方程式は

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3T}{r} \qquad (11.4.10)$$

となり，$T=1/r^3$ という解が求まる．

このようにして，ビアンキ恒等式から，すべての場所で曲率が $1/r^3$ に比例することが導かれることがわかった．関数 $\exp(-\lambda)$ と量 T との関係も同様の簡単な考察から求まり，$\exp(-\lambda)$ が r に反比例する量だけ 1 からずれることがわかる．

11.5　ワームホールという概念に関する考察

前節の考察から，十分に小さい球状の物体は，いたるところに m/r^3 に比例する曲率をもたらすことがわかった．この状況の二次元版は，「渦巻き形」の表面を這う虫が感じるものになる．図 11.2 に描かれているような，xy 平面と直角に交わる z 軸を中心軸とした回転面を考えてみよう．この面を，ある時刻 $(dt=0)$ での現実の空間の，ある特定の角度($\phi=0$ とする)の断面を表わすものと考える．この面を表わす式が $z(r)$ だとすれば，ある一定の角度 θ での線素は

$$(ds)^2 = (dr)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2(dr)^2 = \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right](dr)^2 \qquad (11.5.1)$$

となる．ここで，$(dr)^2$ の係数をシュワルツシルト解のものに等しい

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{1-2m/r} \qquad (11.5.2)$$

とし，これを使って $z(r)$ を計算する．答は簡単に求まり

$$z^2(r) = 8m(r-2m) \qquad (11.5.3)$$

となる．つまり，この面は放物面であり，原点から $r=2m$ の所にその「くびれ」がある．

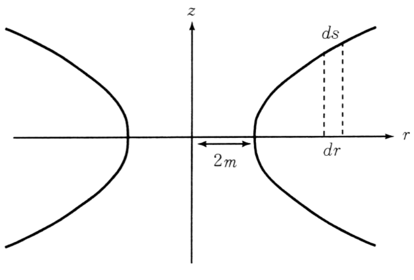


図 11.2

この結果から推測をめぐらすことができる．$r>2m$ の領域は，原点に質量 m がある場合の空間を表わす．しかし原点に近づいても $r<2m$ の領域に達することはなく，それまでの $r>2m$ の領域と同じ形をした，しかし別の領域に入っていく．このことから，我々が「質量」と呼んできたものの影響は，我々が存在する空間のトポロジーが特殊

な部分に過ぎず，実際には重力の源などどこにもないという議論も登場した(特に J. A. ウィーラーによって展開された).

質量をもつ粒子すべて，それに付随する半径 2 m の抜け穴をもっており，素粒子とは他の空間へ通じる穴であると想像するのは興味深い考え方である．ウィーラーはこの穴をワームホールと呼んだ．電荷をもつ粒子だったら，電気力線は穴を通ってつながっていなければならず，ワームホールの片側に入っていき反対側から抜け出る．つまりワームホールは，粒子・反粒子対の存在と対応しているのかもしれない．

■ 実際の半径が臨界半径よりも小さくなるほど質量が集中している星を現在はブラックホールと呼び，その存在はほぼ間違いない．182 ページ以降も参照．素粒子のワームホール的描像は，現在は捨てられている．

このような素粒子像を具体的な理論にすることは成功していない．ワームホールによる影響が実験で観測されたこともない．臨界半径が実際の半径に近くなるほど質量が集中している星は見つかっていない．臨界半径よりも小さな星があったとしても，光はその表面から出ていくことはできないので見ることはできない．したがって，そのような天体は見つかっていなくとも，存在している可能性はある．知られている素粒子はすべて対応するワームホールの半径よりも大きい．たとえば中性子に対しては $r=2m\approx10^{-33}$ cm となり，これは中性子の実際の大きさの 10^{20} 分の 1 程度である．ワームホールの半径が粒子のコンプトン波長 $\hbar/mc$ と同程度になるためには，その粒子は 10^{-5} グラムの質量をもっていなければならない．

11.6　ワームホールの理論的研究に関する問題

問うべき疑問がいくつかあり，それが理論的研究の出発点となる．第一に，物質の振る舞いに関して我々が現在もつ知識を認めた場合，十分に多量の物質が集まって，臨界半径よりも狭い領域の中につぶれてしまうことは可能だろうか．たとえば，膨大な領域にダストがほぼ一様に広がった状態から始めたとしよう．重力収縮が起こり，物質は熱くなり，最初は化学反応が，それから核反応が始まるだろう．質量が凝縮すると，その凝縮に逆らう電子の圧力が発生する．電子ガスは排他律が許す以上に圧縮できないからだ．しかし全質量が十分に大きいときは重力も大きくなり，電子ガスを圧縮させ核子は凝縮し続ける．

この凝縮のプロセスは，まだ理論的に詳しく調べられていない．ワームホールについて知る前に，質量が非常に大きいときの古典的重力理論の問題をまず研究する必要があると思われる．臨界半径以下の大きさの球へつぶれることが可能ならば，我々は決して，外部からそれを観測することはできない．そこからの光はどんどん赤みをまし，赤外線，ラジオ波となり，結局は「死んで」しまう．しかし，つぶれていく物質はどういう状態なのかという疑問には，物理的意味があるだろう．

まず，物理的プロセスが，動いている物質に固定された座標系でどのように表現できるかを考えてみよう．状態方程式は圧力 p と物質

密度ρで表わされる．静的な物質では

$$T^1{}_1 = T^2{}_2 = T^3{}_3 = -p, \qquad T^4{}_4 = \rho \tag{11.6.1}$$

となる．動いている物質にとって，このテンソルはどのように見えるだろうか．

$$u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad w = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \rho_0 = \rho + p \tag{11.6.2}$$

という量を用いると

$$\begin{aligned} T^4{}_4 &= \rho_0 w^2 + p, \\ T^1{}_1 &= -\rho_0 u^2 - p, \\ T^2{}_2 &= T^3{}_3 = -p, \\ T^4{}_1 &= -\rho_0 uw \end{aligned} \tag{11.6.3}$$

となる．

ダスト状態から収縮していく物質の力学的問題を解くには，次のように進めばよいだろう．まず，時空は半径と時間の関数であるλとνによって表わされると仮定する．また物質の状態は，密度ρと圧力pによって表わされると仮定する．またpとρを関係づける状態方程式も必要である．

$$p = f(\rho) \tag{11.6.4}$$

最初の試みとして，pとρが断熱的であったらどうなるかを調べるのがよいだろう．そして次には，電磁波の放出による冷却があったらどうなるかを調べることができる．求めたいのは，物質の動径方向の速度$u(r, t)$である．

熱の流れや透明度も絡むこの問題は非常に複雑なものではなく，連立した偏微分方程式の解として答が求まるだろう．この連立偏微分方程式が無矛盾であり，相互依存性の問題がうまく処理でき，何らかの手続きによって順番に解けるようになっていることが望まれる．解が閉じた形で求まるとは望めないかもしれない．しかし連立偏微分方程式がうまく整理できれば，計算機によって数値解が得られるだろう．

■この問題は，第14章で扱われる．

第12章

12.1 宇宙論の問題

前章で我々は，古典論的重力理論の問題の一つ，球対称な質量分布の問題を概説した．これは星に対する理想化されたモデルである．古典論的重力を使って取り組む第2の問題は宇宙論である．他のすべての問題は，まず量子論的に扱う．そしてマクロな物体に関する古典論的結果を得るには，量子論での答の古典論的極限を考える．

宇宙論が何であるのかを説明するのは非常に難しい．全般的に言えば，銀河でさえも無限小の物体とみなせるほど巨大なスケールの現象を考えたときに，何が言えるのかを取り扱う学問である．また，たとえば「始めはすべて水素であった」という初期状態についての推定から出発して，目に見える物体はどこからやってきたのかという問題を考えることもある．

宇宙論では，現実の物質の分布も問題にする．重要な設問は，物質はどこにあって何をしているのかということである．観測としては，いくつの銀河がどこにあって，どちらの方向に動いているかを問題にする．銀河の運動は重力によってのみ支配されると考えられるので，いったん物質の分布と速度を観測すれば，次にどうなるかを予言するのは単純な物理の問題となる．細かな構造が見えなくなるような巨大なスケールを考えると，性質の異なった宇宙論的問題が登場する．すべての細かな動きを平均したとき，宇宙は静的なのか進化しているのか，安定なのか不安定なのか，有限なのか無限なのかといった疑問が出てくる．ある興味をひかれる提案によれば，宇宙は球面に似た構造をもっている．球面には境界も端もないが，表面積は有限である．同様に，我々が住む三次元空間は，四次元球の三次元球面なのかもしれない．すると世界の銀河の分布は，ボールの表面上に散らばった点の分布のようなものになる．

重力理論だけでは球面上の物質の平均分布に制限を付けることはできないし，宇宙が有限なのか，あるいは双曲面のように無限なのかさえ，肯定も否定もできない．したがって宇宙論の問題は常に，いくつかの基本的仮定と結び付いている．これらの仮定の有効性を調べるための最も信頼できる方法は，その仮定から結論を導きだし，それを観測と比較することである．

非常に遠方にある物質の分布の観測は難しく，最新の技術を使って

もかなり不確定である．また，空のかなりの部分の視界が我々の銀河系によって妨げられていることも頭に入れておかなければならない．銀河系には非常に多くの物質があるので，銀河面方向の観測はできない．これらの困難はあるが，今日まで得られた証拠によれば，宇宙全体は一様であり，銀河はランダムに分布しその大きさもさまざまだが，大きな範囲を考えればそれはどこでも同じように見える．二次元的類推をすれば，水溜まりを走り抜けた自動車によってランダムに壁に跳ね上げられた泥の斑点による模様を考え，我々がそのうちの一つの上に立って回りの他の斑点を見回すようなものである．

■ 宇宙空間全体でも同じだとする考え方を宇宙原理と呼ぶ．

銀河の速度を我々からの距離と比較すると，その速度分布は非常に興味深い．距離の測定の難しさについての話は飛ばそう．天文学者たちは，天体の輝きの統計的分布について仮定したり，さまざまな苦労をしながら距離を決定する．一方，銀河の速度は，光の周波数のドップラー・シフトを使って測定される．その結果は，各天体からの光の低周波方向へのシフト(赤方偏移)が，その天体までの距離に比例することを示唆している．

■ ハッブルの法則

最初の講義で我々は，この事実を解釈する簡単なモデルを議論した．もし宇宙のすべての物質が今から T 時間前に起きた爆発の破片だとし，重力の効果は小さいとすれば，爆発の中心に対して相対速度 V で動いてきた破片は，現在，距離 $R=VT$ 離れた所にある．この関係は速度 V の大きさが何であっても成り立つので，すべての破片に対して $(R/T)=V$ は普遍的な定数であると予想される．観測の結果は T が一定であるという仮定と矛盾せず，その値は $(10-13)\times10^9$ 年の範囲にある．値の不確定さは速度ではなく，距離の測定からくる．観測された最も遠い天体は，我々から速度 $(v/c)=0.48$ で遠ざかっている．この赤方偏移は，宇宙について我々に何かを教えてくれる，重要な観測結果である．

銀河の分布についての観測もある．空の，目に見える部分はすべて，互いに極めて似ているが，銀河はランダムに分布しているのではなく，まとまって，つまりいくつかずつ集団になって分布している．もし，宇宙のある決まった大きさの各領域に存在する銀河数がほぼある一定の数 N であり，その分散が $\pm\sqrt{N}$ であれば，銀河はランダムに分布していると言うことができる．平均として，銀河間の間隔は銀河の直径の数十倍である．我々の銀河系は直径が約 10 万光年，また平均的な銀河間の距離は約 100 万光年である．一辺が 100 万光年よりも長い立方体の内部の銀河分布は，$N\pm\sqrt{N}$ ではない．銀河は 50 程度のものが集団となって観測されることが多い．さらに，集団の集団も見られる．しかし集団の集団の集団が存在するとは言われてはいない．つまり，1 億光年よりも大きなスケールで考えれば，宇宙における銀河の分布は「ランダム」に非常に近いと思われる．

銀河の集団化およびその集団の集団化は，それらの間の重力によるものと推定される．また，1 億光年以上大きなスケールの集団が存在

しないことは，そのオーダーの距離では重力がきかない証拠であると示唆されたこともある．しかし我々はその見解は取らない．明確に矛盾する現象でもない限り，理論を修正したくはないからである．集団の集団の集団が存在しないということが，我々の理論に矛盾していることだとは私には思えない．このことは単に，宇宙をある意味で一様だと考える場合，物質密度を平均化しなければならない長さの尺度を表わしていると考えることにする．

我々からの距離の違いによって，この平均化された物質密度に変動はあるだろうか．我々からの距離が R 以上，$R+\varDelta R$ 以下の範囲にある銀河数を数えるという試みがある．結果は，距離とともに密度にわずかな変動があり，遠いほど銀河の密度は増えている．しかしその変動は誤差に比べて小さく，密度が一定だとする予言，あるいはそう仮定する理論は，現在の見積りとは矛盾していないようである．

12.2 宇宙モデルを導くときの前提

観測は宇宙の明確な特徴を決めるほど正確ではないので，宇宙の構造については我々の創意に依拠し，そして大胆な仮説をたてていかなければならない．ほとんどすべての宇宙論学者がたてる仮説は，宇宙は1億光年以上の宇宙的スケールで考えたとき，どこから見ても同じように見えるというものである．ただし必ずしも，同時にそう見えるとは仮定しない．つまり，宇宙のいかなる場所でも，その場所から見た宇宙が現在我々が見ている宇宙と同じように見える瞬間があった(あるいは，今後ある)ということである．このことは，もし各地点の時間を適切にずらせば，どこから観察しようとも宇宙の進化は同じ経過をたどることを意味する．

上記の仮定は，非常に強い意味での宇宙の一様性を導く．少なくとも私が理解する限り，これは完全に恣意的な仮定であり，そしてもちろん，いかなる観測で確認することもできない．観測は我々の銀河系の周辺の非常に狭い領域に限られているからであり，また宇宙の進化は我々の寿命よりも数億倍も長い「宇宙的」スケールで進むからでもある．宇宙が一様であるという仮定は，天動説の敗北の歴史から生まれた偏見を反映したものだと私は考える．人類は地球が宇宙の中心ではないと認めたとき，しばらくは太陽中心の宇宙観をもっていたが，結局，太陽も他の星と同様，銀河系の中の平凡な位置(中心ではない)を占める普通の星でしかなく，我々の銀河系さえも特別なものではなく，無数の銀河のうちの一つでしかないことを理解するようになった．そこでその発見の延長として，我々が存在する場所は，宇宙の他のどの場所とも同じなのだと仮定するようになった．我々が普通の銀河の中の普通の星の周りを回る普通の惑星に生きていると言った後で，この場所が宇宙の中で何か特別であり，物質密度が最小(あるいは最大)の位置だったとかと言うのもおかしな話である．このおかしさを避け

るために，我々は宇宙の一様性という仮定に執着することになるのだ．

しかし我々はこの仮定を，その意味を認識せずに受け入れることはできない．私の見解を説明するために例え話をしよう．飛行機から行き当たりばったりにパラシュートで飛び下り，カンバの林に着地したとしよう．行き当たりばったりに飛び下りたのだから，この場所には何も特別な意味はないはずだ，だからといって，地球はどこもカンバに覆われていると結論づけてよいだろうか．飛び下りた位置をまったく勝手に選んだとしても，この結論は間違っているだろう．しかし宇宙論の基本的仮定をする際に，我々はこれと同じような議論をしているように見える．

3 種類の宇宙の理論を説明しよう．ミルンの理論 [Miln 34] は，重力をまったく無視した理論であり，宇宙の平均物質密度が充分に小さければよい理論である．また，アインシュタインが最初に考えその他の人々によって追求された，宇宙は動的ではなく静的であるという理論がある．静的という仮定は，赤方偏移が距離に比例しているというハッブルの観測が出た以前に考えられたものである．静的宇宙はアインシュタイン方程式のエネルギー運動量テンソルに，下の式のように新たな項を加えなければ維持することができない．

$$R^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu}{}_{\nu}R = KT^{\mu}{}_{\nu}+\Lambda g^{\mu}{}_{\nu} \qquad (12.2.1)$$

定数 Λ は「宇宙定数」と呼ばれている．この項の存在の可能性についてはすでに議論した．

$$\Lambda\int d\tau\sqrt{-g} \qquad (12.2.2)$$

という作用があれば，この項が出てくる．もしアインシュタインが，自分の方程式にはこのような項が存在しないとしたならば，彼はハッブルが観測したような，進化する宇宙を予言できただろう．ハッブルの発見後はアインシュタインは，評判の悪くなったこのような理論への興味は失ったが，まだ多くの人が，さまざまな値の宇宙定数を使って理論を展開している．しかし我々は，$\Lambda=0$ の理論のみを考えることにする．

ホイルによる巧妙な理論もある [Hoyl 48]．彼は，宇宙はどこでも同じ経過をたどって進化すると仮定したのみならず，定常でもある，つまり宇宙はどこでも，そしていつでも同じだと仮定した．宇宙塵から星や惑星が常に生成され続けているこのような宇宙を維持するには，生成された銀河が互いに遠ざかっても平均物質密度が一定になるように，宇宙のすべての場所で物質が生成され続けなければならない．しかしこの理論では物質の生成機構は具体的に指摘されておらず，エネルギー保存則について詳しく考察していない．たとえば，生成された物質がどのような状態なのか，どのような速度をもっているのか，などを理解できるようなメカニズムが指摘されていない．普通ならば，物質やエネルギーの保存則といった大事な法則をこのように傲慢に無

視する理論に対して，物理学者は反対するものだが，ここでは普通の問題を扱っているのではなく宇宙論の問題を扱っていることを頭に入れておかなければならない．

一方，その他の理論では物質生成の問題は隠されてしまう．宇宙の進化のある段階で物質が存在したと仮定され，その後に何が起こるのかという問題のみを取り扱う．生成のメカニズムは与えられず，この点では定常宇宙論は不合理だと責めることはできない．さらに，宇宙は膨大な広さをもっており，生成率は極めて小さくても，つまり直接観測することが不可能なほど小さくても構わない．一年間に4立方メートルに水素原子が一つという割合で生成されれば，宇宙を定常状態に維持するのに充分なのだ．

我々はまず $\Lambda=0$ とし，宇宙は定常だとは仮定しないが，すべての場所で同一の発展をすると仮定した理論を考える．同じ発展段階があらゆる場所で同じ時間座標 t で表わされるように時間のスケールを調整すれば，時空の幾何を表わすロバートソン-ウォーカー計量は

$$(ds)^2=(dt)^2-\frac{R^2(t)}{(1+kr^2/4)^2}\Big[(dr)^2+r^2\Big(\sin^2\theta(d\phi)^2+(d\theta)^2\Big)\Big] \tag{12.2.3}$$

■ この形自体は Λ の有無とは無関係である．

この計量の簡単な性質をいくつか説明しよう．もし同じ場所にとどまったとすれば，それがどこであろうとも $ds=dt$ となる．もしある特定の時間 $dt=0$ に宇宙を見回したとすれば，その時間における三次元空間は，曲率はゼロでないかもしれないが球対称である．空間の一様性というアイデアは，この球対称性を要求する(どこにいても同じに見える面は，球面しかない)．したがって我々は，どこから見ても等方な，曲率が一定の三次元面に対応する計量を書く．$k>0$ の場合，この計量は三次元球面に対応し，$k<0$ ならば曲率は負になり，無限大の宇宙になる．

三次元球面をどのように表わしているのか調べてみよう．二つの角度 θ と ϕ で表わされる二次元球面の数学に類似した方法を使う．二次元球面は一定の半径 b をもち，角度は

$$\begin{aligned} z&=b\cos\theta,\\ x&=b\sin\theta\cos\phi, \qquad x^2+y^2+z^2=b^2\\ y&=b\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{12.2.4}$$

と定義される．四次元空間の場合には，三番目の角度 ξ を導入すればよい．

$$\begin{aligned} w&=a\cos\xi,\\ z&=a\sin\xi\cos\theta,\\ x&=a\sin\xi\sin\theta\cos\phi,\\ y&=a\sin\xi\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

この角度 ξ を使えば三次元面 $dt=0$ 上の計量は，半径の二乗および

$$(d\xi)^2+\sin^2\xi\Big((d\theta)^2+\sin^2\theta(d\phi)^2\Big) \tag{12.2.6}$$

に比例する．動径座標を使った式(12.2.3)に移行するには，単に変

換

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi}{\sin\xi} \qquad (12.2.7)$$

をする(r^2 は $x^2+y^2+z^2$ ではないことに注意). $\cos\xi$ は

$$\cos\xi = \left[\frac{1-\dfrac{kr^2}{4}}{1+\dfrac{kr^2}{4}}\right] \qquad (12.2.8)$$

となる. これを使えば, 計量 (12.2.3) は球面を表わしていることがわかる. $R(t)$ は座標の変位を弧の長さに変換する因子であり, 時間によって変化しうる. 計量は一般に静的ではない.

12.3 宇宙論的計量の解釈

調べるべき最初の質問は, この計量中の物体の力学に関するものである. 静止している物体は, 本当に静止しているだろうか. そのような物体は u^t のみがゼロではなく, 運動方程式は

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{tt}u^t u^t$$

となる. $\Gamma^\alpha_{tt}=0$ なので, この座標系は質量をもつ粒子の集合によって実現される.

式 (12.2.3) を使うことによって, 観測量についての予測を $R(t)$ で表わすことができる. したがって, $R(t)$ を決定する宇宙のモデルを作ることもできるかもしれない. たとえばホイルの定常宇宙の $R(t)$ は, 時間について指数関数になる. ミルン宇宙の $R(t)$ は, 単に時間 t に比例する.

ミルン宇宙のいくつかの性質を, この宇宙が場所は違っても同じに見えることを理解するために簡単に説明しよう. 前に, このモデルは重力がない場合に対応すると言った. たとえば, 座標を書き替えて計量を平坦なものにすることができる. しかしすでに述べたように, この宇宙の三次元面は曲率をもっている. この曲率の起源は, ある時刻 $t=0$ にある点からさまざまな速度で散らばっていく時計の集合を考えることによって理解できる. この現象をミンコフスキー時空図に描

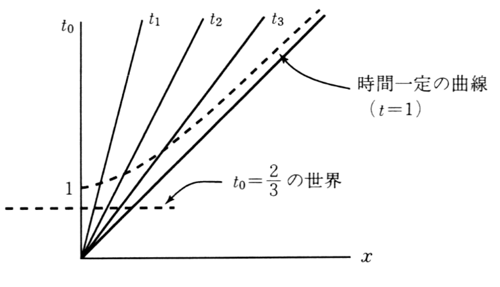


図 12.1

いてみると，各時計の世界線はさまざまな座標系の時間軸を表わす．したがって，各時計の時間が等しくなる面は曲がっている(図 12.1)．「ある一定の」時間での三次元面はこのような双曲面に対応し，したがって曲率をもつ．しかし四次元時空はもちろん平坦である．

曲率のもっと操作的な見方は，半径と円周の関係である．「現在」という部分空間でそれらを測定すれば，半径は $2\pi R$ になるだろう．しかし一定の t での測定は，距離 r に比例する速度で外向きに動いていく各銀河を，静止しているかのように見たときの測定に対応する．したがって半径は，その長さ方向に沿って動いている棒によって測定される．また円周は，その長さ方向に対して垂直に動いている棒によって測定される．したがって，曲率の存在が観測されることになる．

一定の t での三次元面の意味を明らかにしたので，天文学的観測について何が言えるかを説明しよう．たとえば，どこかの場所の銀河から放出された信号の，見掛け上の周波数の変化と $R(t)$ との関係を考えてみる．放出時刻と座標 r を指定したとき受信間隔がどうなるか，調べなければならない．光の信号の経路は，$(ds)^2=0$ として求める．光が動径方向に進む場合

$$(ds)^2 = 0 = (dt)^2 - \frac{R^2(t)}{(1+kr^2/4)^2}(dr)^2$$

つまり

$$\frac{dt}{R(t)} = \frac{dr}{(1+kr^2/4)} \tag{12.3.1}$$

となる．

一定の座標 r にある時計について論じる場合，dt が固有時間間隔となる．時計の針が刻んだ時間は単に，$\int dt$ である．振動数を比較するには，放出時間と受信時間の長さの比を計算しなければならない．時刻 t に始まり時刻 $t+\varDelta t$ に終わる信号を送ったとし，受信はある時刻 t_0 に始まり $t_0+\varDelta t_0$ に終わったとしよう．最初のパルスと最後のパルスの経路に沿って (12.3.1) を積分すると，各銀河の座標 r は一定なので

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^r \frac{dr}{1+kr^2/4} = \int_{t+\varDelta t}^{t_0+\varDelta t_0} \frac{dt'}{R(t')} \tag{12.3.2}$$

となる．間隔 t_0-t の大きさが何であれ，$\varDelta t$ と $\varDelta t_0$ がどちらも $R(t)$ の変動に比べて短ければ，式 (12.3.2) より

$$\frac{\varDelta t}{R(t)} = \frac{\varDelta t_0}{R(t_0)} \tag{12.3.3}$$

したがって周波数の比は関数 $R(t)$ で決定され，結果は

$$w_{\text{受信}} = \frac{R(t)}{R(t_0)}\cdot w, \qquad w = \text{最初の周波数} \tag{12.3.4}$$

関数 $R(t)$ は宇宙のスケール因子である．膨張宇宙に対応して $R(t)$ が時間 t とともに単調に増加していれば，受信されるすべての周波数は赤方偏移する．t_0-t が R の変動に比べて小さければ，偏移の大き

さはこの時間間隔にほぼ比例する．

この赤方偏移とハッブルの赤方偏移を結び付けるには，座標 r のさまざまな値に対応して距離を指定する手段を考え出さなければならない．

12.4　宇宙での距離の測定

遠方の銀河までの距離を，見かけの角度の幅を見ることによって測定することを考えてみよう．銀河の半径を L とする．角度の幅が $\Delta\theta$ に見えたとすると，この銀河までの距離 D_0 は

$$\Delta\theta \cdot D_0 = L, \quad \text{つまり} \quad D_0 = \frac{L}{\Delta\theta} \qquad (12.4.1)$$

長さ L は同時刻 $dt=0$ での長さだとしよう．ϕ は一定であり，$\Delta\theta$ は無限小として扱えると仮定する．固有時間は空間的になり，

$$-(ds)^2 = \frac{R^2(t_0)}{(1+kr^2/4)^2} r^2 (\Delta\theta)^2 = L^2 \qquad (12.4.2)$$

したがって

$$D_0 = \frac{R(t_0) r}{(1+kr^2/4)} \qquad (12.4.3)$$

$1/\sqrt{k}$ よりもずっと小さな距離の場合，r はスケール因子 $R(t)$ を使ってこの方法で測定された距離に対応する．この方法で測定された距離を使うと，一次近似として，遠方の銀河の赤方偏移は我々からの距離に比例することもわかる(ハッブルの法則)．

距離の評価をするためのもう一つの通常の方法は，銀河の見かけの明るさを利用することである．銀河は一定の，平均的な「標準の」明るさをもっていると仮定する．この方法は，明るさは逆二乗則を満たすので，標準的なロウソクの距離を D^2=(標準的明るさ/見かけの明るさ) という関係によって評価する方法に対応する．今扱っている問題では，見かけの立体角は，銀河の直径を L として (L^2/D^2) である．また，我々がいる方向に Δt の間隔に放出される N 個の光子は，(12.3.3) によって決まる Δt_0 の間隔に観測されるので，時間の遅れの因子も考慮しなければならない．つまり明るさと比較する場合，周波数の変化 (12.3.4) による光子のエネルギーの減少を表わす因子を含めなければならない．結局，距離 D と r との関係は，

$$D = \frac{R^2(t_0) r}{R(t)(1+kr^2/4)} \qquad (12.4.4)$$

これは式 (12.4.3) とは $R(t_0)/R(t)$ 倍だけ異なり，D_0 と D は一致しない．しかしこれらすべてをまとめて，理想的な場合には $R(t)$ を求めることができる．これが，パロマ山の 200 インチ望遠鏡を使って行なわれた観測の動機である．銀河を長い時間かけて観測し，その直径，明るさ，赤方偏移を測定し，以上のモデルが正しいとして関数 $R(t)$ の性質についてのよりよい証拠を求めるのである．

我々の位置から距離ρ離れた厚さ$d\rho$の球殻内にあるべき銀河の数を考える場合，ρがD_0タイプの距離か，Dタイプの距離かによって，もちろん異なった表現を得る．しかし答は

$$\rho \text{ と } \rho+d\rho \text{ の間の数} = \frac{dr\, r^2 R^3(t)}{(1+kr^2/4)^3}\cdot(\text{定数}) \qquad (12.4.5)$$

ただし銀河はすべての距離で同じ平均的質量をもっているとした．

宇宙の構造を調べるこれらの方法はすべて，間違っているかもしれない仮定を含んでいることを強調しておかなければならない．明るさによる距離の決定は，銀河の明るさが年令とともに大きくは変わらないと仮定している．星の進化について何らかの仮定をし，込み入った補正を計算しようとしている人もいるが，現実には，銀河の明るさがどのように変化するのかわかっていない．直径を測る方法を使うべきなのだろうか．しかし遠方の銀河の直径を測るのは難しいばかりでなく，見かけの直径が年令とともに増えるのか減るのかもわかっていない．しかも銀河が非常に暗いとき，そのためにどれだけの銀河を見過ごしているのか知ることは不可能である．ホイルの宇宙を仮定すればこれらの困難は結果には影響しないが，彼の理論は極めて特別な宇宙論であり，宇宙は定常なので銀河は平均として変わらないと，暗に決めてしまっている．

12.5 有限の宇宙または開いた宇宙の特徴について

宇宙の詳しい理論($\Lambda=0$のときはフリードマン模型，そうでないときはルメートル模型と呼ばれる)は，エネルギー運動量テンソルの成分を使って調べることができる．計量(12.2.3)から求めた曲率テンソルから計算し，ρを物質密度とすると，44成分は

$$T^4{}_4 = 3\left(\frac{k+\dot{R}^2}{R^2}\right) = 8\pi G\rho+\Lambda \qquad (12.5.1)$$

他の対角成分は

$$T^1{}_1 = \frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{k+\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi Gp+\Lambda \qquad (12.5.2)$$

この方程式でpは平均圧力を表わす．これには通常の気体の圧力，光の圧力および他のプロセスによるすべての圧力が含まれる．ここでの議論のために，気体の圧力が最も大きく，他の圧力は無視できると仮定しよう．しかし，(v/c)を平均速度としたときこれは非常に小さく，気体の圧力($(1/2)\rho v^2$)は極めて小さくなるので，宇宙の変化を決める際には影響はないとする．我々は，Tが発散条件を満たさなければならないと要求することによって，ρから直接，Rの変化を求める．結果は

■つまり，電磁波は無視する．

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3pR^2\frac{dR}{dt} \qquad (12.5.3)$$

という，pとρの関係式である．この式は

$$T^{\mu}{}_{4;\mu} = 0$$

とでる．もう一つの独立の共変的発散条件

$$T^{\mu}{}_{1;\mu} = 0$$

は$p_{,r}=0$となり，これは宇宙が等方ならば当然予想される．結果は非常に簡単な形をしており，Rを宇宙の半径を呼ぶとすれば，よくわかる古典的意味付けができる．ρR^3は，一様な密度ρの一辺Rの立方体中にある総質量つまりエネルギーである．そして右辺の項は，圧力と体積変化率の積なので仕事率である．宇宙全体ではなくRに比例する一辺aの小さな領域を考えても，方程式は同じ形になるだろう．この場合は

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3pa^2\frac{da}{dt} \tag{12.5.4}$$

もし$p=0$ならばその体積内の物質の量は変化しないので

$$\frac{4\pi}{3}\rho R^3 = M \tag{12.5.5}$$

は定数となる．この方程式を解けば，

$$(k+\dot{R}^2) = 2G\frac{M}{R} \tag{12.5.6}$$

が求まる．この方程式を解けば$R(t)$が求められる．可能な解の振る舞いは，ニュートン力学の枠組み内で容易に理解される．何が起こりえるかは，質量mの球の外側の厚さdaの球殻に何が起こりえるかということから，容易に考察できる(図 12.2 参照)．一定である内部の質量による場の中の，自由落下の問題とみなすことができ，落下する物体の運動方程式に従う．エネルギー保存則によれば，ニュートン力学では

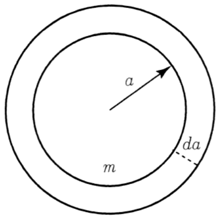


図 12.2

$$-\frac{Gm}{a}+\frac{\dot{a}^2}{2} = \text{一定} = \text{エネルギー(質量)} \tag{12.5.7}$$

このエネルギーの大きさによって，3 つのタイプの解が可能になる．

1. エネルギーが正ならば，球殻は永久に膨張し続ける．
2. エネルギーがゼロならば，無限に希釈された静的宇宙に向けて漸近的に近づく．
3. エネルギーが負ならば，運動の領域は有限であり周期的になる．

ニュートン的問題に対するこれらの解が，可能な宇宙の変化に対応する．1. は負の曲率をもった開いた宇宙に対応し，3. は正の曲率をもった閉じた宇宙に対応する．

なぜこれらのニュートン的な解が，宇宙の解を特徴づけられるのだろうか．理由は，球対称の問題では，有限な球殻の運動がその内部の質量のみによって決定されるからである．有限な球殻の運動を調べることで，宇宙全体の振る舞いが求められる．ここでも，宇宙の一様性という仮定がもつ力を見ることができる．

第13章

13.1　宇宙論における物質密度の役割

一様性という仮定が，宇宙が開いているか閉じているかという可能性を導くことを見たので，今度は，我々の宇宙が無限で永遠に膨張するのか，それとも有限なのかという，宇宙論における最も興味深い質問の一つを考えることにする．この質問に対して，観測を根拠にして答えようとすると，問題となる要素は何だろうか．銀河の速度は，銀河が脱出できるほど大きいか，それとも運動の範囲が限られてしまうほど小さいかというのが，ポイントとなる質問である．ニュートン力学をもとにして見積もってみよう．この問題では，ニュートン力学で相対論的力学を十分近似できる．半径 r の球殻の動径方向の速度が r に比例する場合，運動エネルギーは脱出するのに十分だろうか．球対称性があるので，エネルギー保存則を書き下すときには球殻より内部の質量のみを考える．宇宙の物質密度 ρ が一様だと仮定すると，無限と有限の宇宙の境目を表わす臨界条件は

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} \qquad M = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \text{ のとき} \tag{13.1.1}$$

この計算はどの r で行なってもよい．T をハッブル時間として $v=r/T$ と置く．T は観測で決めるべき数である．すると臨界条件は，密度で表わされる．

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\frac{1}{GT^2} \tag{13.1.2}$$

現在のハッブル時間の観測値 $T=13\times10^9$ 年を使えば，この臨界平均密度は $\rho=1\times10^{-29}$ グラム/cm^3 となる．この臨界密度と比較できるぐらいに平均密度を精度よく測定すれば，宇宙が無限か有限かはすぐにわかる．

残念ながら宇宙の物質密度の測定は極めて難しく極めて曖昧で，それ自体かなり不確かなハッブル定数の測定よりもはるかに難しい．前にも述べたように，ほんの 2, 3 年前は T は現在の 2.4 分の 1 程度だと思われていた．修正された値は最初の値よりもはるかに多くの苦労の結果なので，より信頼できると思われるが，それでもまた同じ程度の修正がなされることも考えられる．常にそうだが，最終結果は，最も測定が困難な測定値，つまり現在の望遠鏡の限界にある銀河の値に大きく依存している．距離は銀河の明るさではなく銀河団の明るさをも

とに見積もられているが，これらの銀河団がその領域特有の性質をもっているのか，それとも我々に近い所にある銀河団に近い光度をもっているのか，何の保証もない．つまり，T の最終的な見積りは，それぞれが最終結果の誤りに大きく寄与しているかもしれない，長い連鎖となった一連の仮定の正しさ次第なのである．

平均物質密度の見積りについては，状況はどうだろうか．もし銀河を勘定し，それらが大なり小なり我々の銀河系のようなものだと仮定すれば，目に見える物質の全密度は 10^{-31} g/cm^3 程度になる．目に見える物質は全物質の一部なので，これは物質密度に対する下限を表わしている．銀河間領域の物質密度は，光源までの距離の関数として，さまざまな鋭いスペクトル線の強度を測定することで見積られてきた．スペクトル線の吸収度が，銀河間の領域に存在する，対応する原子の数の尺度になると想定される．データを物質密度の推定値に換算するには多くの仮定と補正が必要なので，最終結果は桁ぐらいしか信用できないだろう．ナトリウムの量の測定は比較的うまくいったが，主要な量は水素であり，それは水素の 21 cm 線の吸収から得られるはずである．電波天文学者はこの作業をしており，現在までの結果は，目に見える物質は総量のごく一部でしかないことを示唆しているようだ．臨界値 $\rho=1\times10^{-29}$ g/cm^3 は，どの推定値でも常に誤差の範囲内にある．しかしデータにはたくさんの問題点があるので，もしある理論が 10^{-27} g/cm^3 といった大きな密度を必要としても，観測はその理論を，密度の予言値が大き過ぎると言って否定することはできない．

ここで，宇宙論に関係する観測の現状について，注意をしておきたい．物理学者が典型的な天文学者の論文を読むと，不確実さや誤差の処理のスタイルが馴染みのないものであることに気づくだろう．計算や測定を報告する論文は，誤差の原因を記載し議論する際に，あるいは主要な仮定に対する信頼度を評価する際にも，非常にしばしば，非常に注意深いのだが，ハッブル時間 T などの数字を提示する段になると，たとえば，物理学者が使用する通常の $\pm\varDelta T$ といった形での全体的な誤差の評価を示していない．誤差の多くの原因を注意深く指摘し，誤差はかなりの数になるのは明らかなのだが，著者たちは，自分たちの数字が正しい確率を正確に述べることに積極的ではないように見える．問題は，しばしば他の研究者が可能な誤差を無視して結果を受け取り，惑星運動の周期のように正確な観測値であるかのように取り扱うことである．たとえば宇宙のモデルを扱うときには問題が起こる．すべてのモデルがほぼ距離に比例した赤方偏移を予言しており，遠方の銀河の加速度を考えて初めて，各モデル間の違いが重要になる．この加速度をパラメーター q によって表わすことにすると，観測や計算によれば，たとえば

$$\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}=q=1.2 \qquad (13.1.3)$$

となるが，この数字は理論との比較には役立たない．加速度の観測値

はたとえば 1.2±5.0 といった大きな誤差を含んでいるので，ホイルのモデルが $q=-0.5$ を予言したとしても間違いだとは言えない．しかしまさにこの点で，ある人々は誤りを犯し，誤差を無視して数字を非常に正確なものとして扱ってしまう．よりよい値を得るために多くの天文学者が多大な努力をしているので，もちろんいつかは誤差はずっと小さくなるだろうが．

以上の議論の結果として言えることは，宇宙の問題を扱うとき，臨界密度はほぼ最善の値だということである．この値は非常に多くの喜ばしい性質をもっている．たとえば，宇宙の中心(宇宙の一様性という原理より，これはすべての位置を意味する)で，周囲に影響を与えず物質を生成することができる．物質密度 ρ があると，それによって空間は正の曲率をもつことがわかっている．一方，銀河の進化の固有時間で定められる三次元空間は負の曲率をもつ．臨界密度ではこの二つの効果が相殺して，平坦な三次元空間ができる．また臨界密度は，銀河が有限個の宇宙と無限個の宇宙の境目にある．臨界密度がもつこれらの不思議な性質を考えると，これが「真」の値だと推測したくなる．しかし，美しい結果が単に「美しい」という理由だけでより確からしいと考えるような，軽率なことをしてはいけない．この結果は，我々がたてた仮定に基づく人工的結論と言うべき部分もあるからである．

■図 12.1 参照.

13.2　宇宙が非一様あるいは非球対称である可能性について

これまでの結論はすべて，一様な宇宙という仮説に大きく依存しているので，その証拠について検討してみよう．地球から 1.3×10^8 光年の範囲の宇宙を調べると，銀河団はおとめ座銀河団一つだけある．つまり，物質の分布は非常に非対称的だ．この非対称性は非常に大きいので，たとえば，星間塵によって覆い隠された結果ではありえない．星間塵の影響は，銀河の赤道から数度以内の範囲にしかない．通常の銀河団中の銀河数は，密度の揺らぎとみなすには大き過ぎるので，一様性を調べるには，10^8 光年よりも大きな領域を見なければならない．実際，非常に遠い領域では，宇宙はおそらく数千の銀河を含む，規則的でコンパクトな超銀河団で満ちているように見える．銀河は，超銀河団の重心の回りに蜂のように群がっている．赤方偏移の散らばりを見ると，重心に対する速度は 1000 km/秒 の程度である．この散らばりは，銀河団の質量の，非常に有用な尺度となる．銀河団は重力によって形成されており，長い寿命をもったシステム，つまり安定な束縛状態であることは明らかである．1000 km/秒 という速度は，システムから脱出するためには小さ過ぎるからである．このことから質量を推測することができる．しかしこの計算にはいくつかの問題がある．たとえば，おとめ座銀河団の質量についてこの計算をすると，他の方法による計算値より 30 倍も小さな結果を得る．しかし遠方の超銀河

団は大きいので，結果はもっと信頼できるものになるだろう．

銀河団が存在するということ自体が，宇宙の年令に匹敵するほどの期間結び付いていたくらい，強い力で銀河が互いに引き付け合っているということを示している．ほとんどすべての銀河が集団となっており，単独の銀河はほんのわずかしかないということは，非常に興味深い．つまり，宇宙のほとんどすべての目に見える物質は，その周囲の物質から逃げられるほど大きな運動エネルギーをもっていない．このことから私には，宇宙の平均物質密度が臨界密度よりもずっと少ないということは，ありそうもないと思える．もし密度が少なかったら，銀河団形成の原因は，その領域で物質を密にした局所的な揺らぎに求めなければならない．しかし，ほとんどすべての物質が集団になるような，望ましい大きさの局所的な揺らぎがたくさんあるということは，統計論的にはありそうもない．密度が大きかった宇宙初期には，そのような揺らぎがたくさんあったと言う人もいるかもしれない．しかしそのようなアイデアに基づく定量的な議論は見たことがない．重力エネルギーが膨張の運動エネルギーと同程度の大きさなので，大部分の物質は集団になったと考えざるをえない．したがって，平均物質密度は至る所で，臨界密度にほぼ等しくなければならないと，私には思える．

平均物質密度についての以上の推論は，一様性の仮定を支持することにはならない．ある領域の物質が互いに結び付いているかという疑問は純粋に局所的な問題であり，状況は場所ごとに異なるかもしれない．銀河が加速されていることを意味する赤方偏移の非線形性を，物質密度と詳細に比較することによってのみ，宇宙原理を確かめることができる．これらは原理的に個別に測定することができる量だが，それらの間の関係は，宇宙原理を採用すれば理論的にも予測できる．距離による物質密度の変化が正確に測定できれば，たとえば物質は宇宙原理の予測とは異なり，近い領域で多過ぎるということになるかもしれない．

宇宙原理が誤っているとしても，宇宙は球対称かもしれない．しかし，宇宙原理的な偏見に従えば，我々が宇宙の中心のような位置にいるという考えは奇妙だと思える．そこで，目に見える領域はほとんど球対称だが，その外側にはより多くの物質が，左右不均等に存在していると仮定してみよう．どのような影響が現われるだろうか．図 13.1 に描かれているような潮汐力によって，遠方の銀河の運動が補正を受けるだろう．（目に見える領域が全体として加速していれば，我々はその加速に気付かない．）その結果は，赤方偏移の四重極的補正となる．つまり，赤方偏移は両極方向で大きく，赤道方向で小さい．

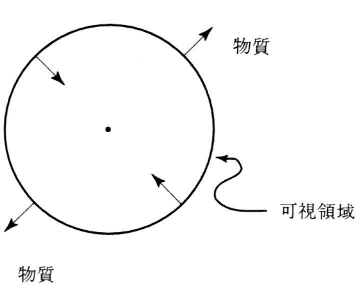


図 13.1

以上の議論は，相対論的な重力理論が宇宙論に関して，明確な予言をほとんどできないことを示している．宇宙論の中心問題は，我々が現実の宇宙を知る，つまり距離と位置の関数として正確に赤方偏移と物質密度を知ることによってしか解くことができないのである．

13.3 消えゆく銀河とエネルギー保存則

宇宙論のその他の疑問，そして宇宙のモデルのいくつかについて，簡単に触れておこう．銀河が視界から永久に消えてしまうということはありえるだろうか．我々が現在もっている理論では，そんなことはありえない．物質密度が臨界値よりも大きかろうが小さかろうが，現在目に見える銀河は，どんどん赤くなることはあってもまったく消えてしまうことはない．銀河が光速度よりも速く遠ざかることなどと心配する必要はない．そうだとしたら，もともと観測不可能なのだから．

ホイルの理論では，遠方の銀河は消える．後退速度に対する彼の表式によれば，8つの銀河で定義される立方体の体積は，ある決まった時間ごとに2倍になる．したがって，光速度よりも速くなる銀河も存在することになる．しかしホイルの理論は，銀河の動きを力によって説明しようとはしていない．単に，時間の関数として位置を計算する規則を述べているだけであり，銀河は結局いつかは，視界から消えることになる．このような膨張を生み出す力を自然界に探そうとするのは意味がない．現在の力学の枠組みではどんな有限の力もこのような動きを生み出せないのだから，未知の性質をもった力と言うしかない．

私は，私の先生であるウィーラー博士の偏見を受け継いでいる．つまり，現在の理論が十分に調べられていないのに，理論に都合のよい変更を加えて現象を説明しようとするのは規則違反だと考える．このようなことを言うのは，もしプラスの電荷がマイナスの電荷と正確に同じでなかったら，ホイルの望むように，銀河を加速する傾向をもつ膨張の力が生じるという推論があったからである．我々は素晴らしい電気力学をもっており，その理論によれば e^+ の電荷は正確に e^- の電荷に等しい．したがってそのような推論には意味がない．正確な観測ができればすぐに誤りであることがわかるかもしれないモデルを説明するために，電気力学という美しい理論を捨てるわけにはいかない．ホイルが正しい可能性は依然としてあるが，そのことは現実の宇宙の観測で決定されるだろう．

数学的な証明や矛盾について気にする人々が知らないと思われることについて，ひとこと述べておこう．物理の結論が誤っているとか矛盾しているとか，それを数学的に示す方法はないのだ．示すことができるのは，数学的仮定が誤っていることだけである．ある数学的仮定が，論理的に矛盾した自然の描写を導くとしたら，我々は自然ではなく，その仮定を変更する．

このようなことを言うのは，ホイルの宇宙理論が，我々物理学者が普通にしている仮定の多くと合致するのかどうか確信がもてないからである．たとえば，相対論の重要な要素である信号伝達の可能性に，問題が起きるかもしれない．もしある銀河が視界から消えたとすると，それは我々にとって，宇宙から消えたことになるのだろうか．その銀

河がまだ見えており，しかも我々の視界内にいる遠方の友人に，その銀河がどのように振る舞っているか尋ねることができるだろうか．我々に対して光速度 c 近くで動いている座標系での c 近くの速度は，合成するとやはり c 未満の速度になるという相対論の規則を保つような，一般的な規則があるのだろうか．

エネルギー保存則について少し触れておく．ホイルの理論では，物質は宇宙の「中心」で静止状態で生成される．前に，重力による負のエネルギーが質量エネルギーと相殺するので，全体としてのエネルギー生成はないと述べた．この種類のエネルギー保存則は，もしどこかに有限の大きさの箱を考えたとき，外部からのエネルギーの流入なしに内部での物質の生成はないことを意味する．つまり，局所的な保存則にのみ意味がある．もしエネルギーがある場所で消滅し，エネルギーの流れがないのに同時に他の場所で再生できるとすれば，全体としての「保存則」があったとしても，物理的な結果は何も導けない．したがって，ホイルの物質生成を次のように解釈することにしよう．図 13.2 に描かれているように，多量の質量が球殻内に分布している有限な宇宙を考える．エネルギーがゼロの粒子が球殻外から中に入ってくる．光子か重力子かニュートリノか，バリオン数保存則について気にする必要のない何らかの新粒子か，何でも構わない．それが，逆方向の運動量をもつ，反対側からやってきた粒子と出会うとすると，水素原子を生成できるだけのエネルギーが生じ得る．粒子が運んできたエネルギーによって物質が生成されるので，このようにして，ホイルの物質生成と，局所的なエネルギー保存則双方が実現される．もし粒子の流量が非常に大きく，物質生成の断面積がちょうどしきい値の所でのみ有限ならば，物質が平均的銀河に対して静止した状態で生成される理由が理解できる．つまり，もし粒子の流量が大きければ，粒子は十分なエネルギーをもつとすぐに，逆方向から来る相手方の粒子を見つけて物質を作り出す．粒子がもちうる最大エネルギーがしきい値とほぼ等しければ，物質は「静止状態」で生成される．このようにして，局所的なエネルギー保存則とホイルの理論が同時に成り立ちうる．もちろん，なぜバリオン数が保存しないのかなど，考えねばならない問題はたくさん残っているが．

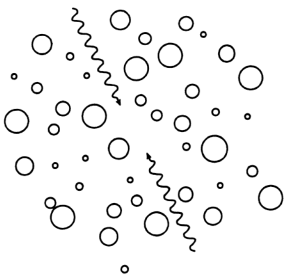


図 13.2

13.4　マッハ原理と境界条件

重力の古典論は，マッハ原理が成り立つかという問題には答を与えない．たとえば重力理論は，銀河の集団全体が我々の周りを回転している場合，コリオリ力の存在を導くだろうか．この問題は次のように考えられた．図 13.3 のように，遠方の球殻状の物質が回転しているとすると，球の中央にある振り子が球殻の動きに引きずられるような力が生じるだろうか．問題は，無限遠で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ という境界条件を置いて解かれる．結果(Thirring [Thir 18])は

$$\omega = \omega_0\left(\frac{GM}{Rc^2}\right) \qquad (13.4.1)$$

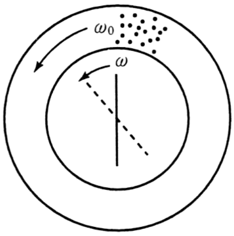


図 13.3

(GM/Rc^2) という量は常に1よりも小さいので，振り子にしろ何にしろ，回転する物質の動きに正確に従うことはない．この結果は，特定の境界条件を選んだことによって影響を受けたと言うべきかもしれない．$g_{\mu\nu}\approx\eta_{\mu\nu}$ のときに重力ポテンシャルが一定だとは言える．しかし重力ポテンシャルがゼロだとしても，$g_{\mu\nu}\approx\eta_{\mu\nu}$ だという保証はない．マッハ原理が破れているように見えるのは，我々が選んだ境界条件のためなのかもしれない．この状況は静電気の場合と比較することができる．遠方での境界条件として $E_z=1$ として方程式を解くこともできる．その解は，どんどん広い領域に拡張することができるが，それは，領域外部にある z 軸に垂直な2平面に，多量の電荷が一様に分布していると仮定していることになる．無限遠で $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ とすることは，「無限遠の外側」で多量の物質が一様に分布していることを意味するのかもしれない．したがって，マッハ原理が我々の理論に合致しているかは，境界条件の意味を検討することによってわかるように思える．

以上のマッハ原理の議論では，固有時間をハッブルの cT などの自然単位で測り，長さをコンプトン波長などの自然単位で測った場合，計量

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu \qquad (13.4.2)$$

中の $g_{\mu\nu}$ の大きさが物理的に意味のある量だろうと仮定した．陽子の波長では，$g_{\mu\nu}$ は 10^{-84} 程度の大きさになる．特殊相対論は，$g_{\mu\nu}=$ 定数という特殊なケースとして登場し，その場合，固有時間と固有距離は実験室での尺度に合わせることができる．太陽などの近傍の質量は，$g_{\mu\nu}$ に小さな寄与をし，銀河の寄与による変動と比較して局所的に急激に変化するので，別個に観測することができる．各バリオンから等しい寄与があったとすれば，この 10^{-84} という大きさが出てくることもすでに見た．このバリオン数には何か意味があるだろうか．たとえば，この数は保存するだろうか．無限大だろうか．宇宙の観測可能な領域のバリオン数が，物理的プロセスに影響をもっていないだろうか．

これらの疑問に対する答は簡単ではないかもしれない．自然は常に最も単純な解を選ぶと説いて回っている科学者もいる．しかし最も単純な解とは，宇宙には何もないという「無」の解である．自然ははるかに複雑なものであり，常に単純でなければならないという主張にくみすることはできない．

13.5 星空の謎

オルバースのパラドックスと呼ばれる昔からある宇宙論の謎は，もし宇宙が無限に広がり，輝く天体が至る所に存在しているとすれば，なぜ空は無限に明るくないのだろうか，と問う．もちろん，星の数は

実際は有限だという可能性もある．そうでないとしても，空が無限に明るくなる必要はない．光の吸収，空間の膨張による赤方偏移，そして重力による赤方偏移が組み合わさって，無限の宇宙でも空が暗くなることはありうる．しかし空には，驚くほどの強さでエネルギーを発している天体がある．誰よりも遠方まで見通す装置をもっている電波天文学者は，特異な構造をもっている電波源を数多く見つけた．図13.4は強度の等高線の概略図である．20から25のこのような電波源が報告され，図が作られている．天文学者が望遠鏡をその領域に向けると，その構造の中心に，横方向をこちらに向けた銀河が見える．ときには，等高線の中心が一つしかなく，その中心に正面を向いた銀河が見えることもある．これは恐らく，同じ種類の天体を別の方向から眺めているのであろう．これらの天体の真に驚くべき性質は，放射されるエネルギーの量である．さまざまな波長の電波の強度を合計すると，観測されていない部分を加えなくても，10^{44} erg/秒 の大きさになる．サイズを測ることでこれらの天体の寿命の下限を推定すると，放出されたエネルギーは 10^{60} erg 程度にまでなる．これは，我々の太陽程度の大きさの星の質量エネルギーの 10^6 倍から 10^8 倍に等しい．可視光線として放出されるエネルギーも，同程度の大きさになる．つまり，10^6 個から 10^8 個の星が完全に消滅したかのようである．このようなエネルギーはいったいどこからくるのだろうか．

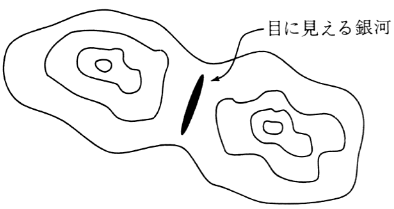


図 13.4

陽子を鉄に変換するという通常の原子核反応では，質量の非常に小さな部分しか消費しない．通常の銀河中の星の数は平均 10^9 個程度であり，星の中の原子核反応では 10^8 個の星の質量エネルギーが放出されることはない．これらの非常に明るいハローをもつ銀河は，可視光線では普通の銀河のように見えるのでこのような比較に意味があるのだ．通常の銀河中のすべての星が超新星的な爆発をしても，これだけのエネルギーは出てこない．このようなエネルギーを得る一つの方法は，数百万の星が，反物質からできている数百万の星と衝突して消滅することである．あるいは，これらの銀河の中心に，通常の星とは非常に異なる方法でエネルギーを生成してる巨大な天体が存在しているのかもしれない．図13.4の二中心構造は，星間塵による銀河平面方向での電波の吸収によるものと，解釈される．

■現在はブラックホールが関係していると思われている．次章，および付録 A も参照．

興味深いことに，通常の星の大きさは，星によって大きく変化することはない．その質量は我々の太陽と同程度であり，大きくてもたか

だか 10 倍程度である．パウリの排他律の要請と脱出速度を考慮することで，星の大きさには自然な限界があることを示すのは難しいことではない．まず電子をフェルミの海に埋めていき(たとえば絶対零度として)，与えられた体積内に陽子の質量を加える．太陽程度の質量では，フェルミ面はかなり高い．しかし通常の星は，相対論的な答と非相対論的な答とではあまり変わらない．

太陽質量の 10^9 倍も含む巨大な天体での凝縮を扱うときは，重力は非常に相対論的になる．天文学者が通常の星に対して適用する，放出による冷却のパターンや内部の崩壊は成り立たないかもしれない．圧力が非常に大きいと，原子核反応の進みやすい方向は，陽子の逆 β 崩壊

$$p+e \to n+\nu \tag{13.5.1}$$

になるかもしれない．このように高質量でニュートリノが豊富な星の進化は，太陽とは大きく異なるかもしれない．これらの現象を説明するためには新理論を作り出す前にまず，現在の物理の知識を適用すると非常に特異な状況で何が起きることになるのか，その研究に真剣に取り組む必要があると私は考える．

第 14 章

14.1 一般相対論でのスーパースターの問題

この章では，ファウラーとホイル [HoFo 63] が最近提示した，質量が太陽の 10^9 倍もある物質の固まり（ここでは，スーパースターと呼ぶ）の問題の解答について議論したい．非常に単純ではあるが，現実の属性をたくさん備えているモデルを考える．この単純な問題への解答を理解したうえで，モデルの精密化について考えることにしよう．出発点は一般相対論の微分方程式，つまりアインシュタイン方程式

$$8\pi G T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad (14.1.1)$$

である．右辺は「幾何的」部分である．ここには計量テンソルで表わした曲率を代入する．静的で球対称な解を仮定すると，計量テンソルの成分は，関数 $\nu(r)$ と $\lambda(r)$ を使って

$$(ds)^2 = e^{\nu}(dt)^2 - e^{\lambda}(dr)^2 - r^2\left(\sin^2\theta(d\phi)^2 + (d\theta)^2\right) \qquad (14.1.2)$$

となる．式 (14.1.1) の左辺は「物理的」部分であり，エネルギー運動量テンソルを含んでいる．物質がガス状であると仮定すると，このテンソルは各位置での圧力 p と密度 ρ のみで表わされる．座標 (r, θ, ϕ, t) を添字 $(1, 2, 3, 4)$ で，また r での微分を「$'$」で示すことにすると，アインシュタイン方程式は関数 $\nu(r)$ と $\lambda(r)$ および圧力と密度を使って，連立方程式

$$G^1_{\ 1} = -e^{-\lambda}\nu'/r - (e^{-\lambda} - 1)/r^2 = -8\pi G p \qquad (14.1.3a)$$

$$\begin{aligned} G^2_{\ 2} &= -e^{-\lambda}\left(\nu''/2 - \nu'\lambda'/4 + (\nu')^2/4 + (\nu' - \lambda')/2r\right) \\ &= -8\pi G p \end{aligned} \qquad (14.1.3b)$$

$$G^4_{\ 4} = -e^{-\lambda}\lambda'/r - (e^{-\lambda} - 1)/r^2 = 8\pi G \rho \qquad (14.1.3c)$$

となる．我々が使うモデルは，p と ρ に何を入れるかで決まる．これらの量は，各位置に立っている観測者が実際に測定する圧力と密度を表わしている．テンソル $T_{\mu\nu}$ が保存則を満たしているという条件を考えないと，意味のある答は求まらない．球対称の場合，テンソルの発散の動径成分のみが意味をもち

$$\frac{\partial T^1_{\ 1}}{\partial r} + \frac{1}{2}\nu'(T^1_{\ 1} - T^4_{\ 4}) + \frac{1}{r}(T^1_{\ 1} - T^2_{\ 2}) = 0 = -\frac{1}{2}\nu'(p + \rho) - p' \qquad (14.1.4)$$

という式になる．これは静的な解で成り立つべき，圧力のバランスを表わしている．この発散の方程式で ν' を消去することができる．次

に，$\exp(-\lambda)$ を消去するための式を求めよう．まず $G^4{}_4$ を

$$G^4{}_4 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r(1-e^{-\lambda})\right] \qquad (14.1.5\mathrm{a})$$

と書き，新しい関数 $M(r)$ を

$$M(r) = \frac{1}{2}\left[r(1-e^{-\lambda})\right], \qquad e^{-\lambda} = 1-\frac{2M(r)}{r} \qquad (14.1.5\mathrm{b})$$

と定義すると

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 G\rho \qquad (14.1.5\mathrm{c})$$

となる．関数 $M(r)$ は密度 ρ の積分になるので，星の質量に比例しているように見える．しかし ρ が測定される座標系の特殊性のため，解釈はそう簡単ではない．この点についてはまた後で議論する．ν' と $\exp(-\lambda)$ の表式を式 (14.1.3a) に代入すると

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = -(p+\rho)\left(4\pi Gp+\frac{M}{r^3}\right) \qquad (14.1.6)$$

これに $M(r)$ に対する微分方程式，および p と ρ を結び付ける状態方程式を合わせて，原理的には $M(r)$，p および ν を求めることができる連立方程式を得る．これは適切な境界条件を付ければ，静的近似でのスーパースターを表わすことになる．

状態方程式はどうとればよいだろうか．太陽質量の 10^9 倍という質量は，銀河スケールに広がっているとすればまだ非常に希薄である．温度が 10^9 K 程度だとしても，気体の圧力はかなり低い．しかしそのような温度では，T^4 に比例する電磁波放射のエネルギー密度は，核子の質量エネルギー密度と比較しても小さくはない．放射の圧力と比較して気体の圧力を無視することで，意味のある近似をすることができる．同様の精神で，速度による核子の質量の多少の増加は無視する．核子の質量エネルギーを単位とすると，核子密度を s として，

$$\rho = s+\epsilon \qquad (14.1.7\mathrm{a})$$

$$p = \frac{1}{3}\epsilon \qquad (14.1.7\mathrm{b})$$

これらの方程式は p と ρ を結び付けるが，状態方程式を得るには，さらに ϵ を指定する必要がある．このような問題を扱うとき誰もがすることだが，断熱仮定をする．つまり，物質全体が最初の一様な状態から，他の部分との混合やエネルギー交換なしに落ち込んでくるとする．箱の中の物質を圧縮すると，内部のすべての振動数は箱の長さに反比例して，同じ割合で大きくなる．断熱過程ではエントロピーは一定なので，温度は一様に上昇しなければならない．したがって，核子の密度は温度の三乗に比例し，放射のエネルギーは T^4 に比例する．温度を 10^9 度を一単位として表わし，エネルギーを核子の質量単位で表わすと

$$\epsilon = aT^4, \qquad s = a\tau T^3 \qquad (14.1.8)$$

m_n を核子の質量としたとき，am_n という数は定数で 8.4 g/cm^3 とい

う値になる．τ は核子一つ当たりのエントロピーに関係した，星の半径に依存しないパラメーターで，(核子一つ当たりのエントロピー)＝$4/(3\tau)$ となる．これらの結果は，断熱圧縮についての一般的条件

$$s^2\frac{d(\epsilon/s)}{ds} = p = \frac{\epsilon}{3} \qquad (14.1.9)$$

からも導かれる．断熱過程での圧力と密度の間のこれらの関係式は，古典的な星の問題に関連して導かれたものである．すべての部分で圧力と密度双方が温度のベキ乗に比例する星は，ポリトロープと呼ばれている．

新しく定義された温度 $t=T/\tau$ と，$8\pi Gm_n a\tau^4=1$ などという新しい単位を使うと，方程式は次のようになる．

$$\rho = a\tau^4[t^4+t^3] \qquad (14.1.10a)$$

$$p = a\tau^4\left[\frac{1}{3}t^4\right] \qquad (14.1.10b)$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2}[t^4+t^3]r^2 \qquad (14.1.10c)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{r}{2}\left(\frac{3}{4}+t\right)\left(\frac{1}{3}t^4+\frac{2m}{r^3}\right)\Big/\left(1-\frac{2m}{r}\right) \qquad (14.1.10d)$$

境界条件としては何を選んだらよいだろうか．中心の温度を決め，表面はずっと冷たく，実質的に零度であると仮定する．解 $t(r)$ と $m(r)$ を求めるための前提は，単に

$$m = 0, \quad t = t_c, \quad \text{at} \quad r = 0 \qquad (14.1.11)$$

となる．

これで問題は，数値計算が簡単にできる形で表現された．中央から始める．そこでは $m(r)=0$, $t(r)=t_c$ であることがわかっている．式(14.1.10c) を使って dm/dr を，式 (14.1.10d) を使って dt/dr を計算し，これらの方程式の間を行きつ戻りつして $m(r)$ と $t(r)$ を求める．t がプラスならば微分 dt/dr は常にマイナスなので，ある位置 r_0 で t はゼロになる．そこで計算を止め，より正確な解では，星の外層部分の値が変わり滑らかに密度ゼロに移行するが，内部の解は大きくは変わらないだろうと想定する．そして r_0 がこの星の半径を表わし，$m_0=m(r_0)$ がこの星の全質量を表わすと仮定する．

14.2　解の意義とそのパラメーター

以上で説明した解は，多くの種類の星，つまりパラメーター τ がさまざまな値をもつ星に対して成り立つ．興味のあるケースでの m_0 と r_0 の大きさについて見当をつけるため，よりわかりやすい単位系への換算率をあげておこう．

$$M \equiv \text{星の質量} = (27\times10^6\ \text{太陽質量})2m_0/\tau^2 \qquad (14.2.1a)$$

$$R \equiv \text{星の半径} = (8\times10^{12}\ \text{cm})r_0/\tau^2 \qquad (14.2.1b)$$

$$T_c \equiv \text{中心の温度} = t_c\tau(10^9\ \text{度}) \qquad (14.2.1c)$$

$$M_{\text{静止}} \equiv \text{星の核子の静止質量} = (27\times 10^6\ \text{太陽質量})2N/\tau^2 \tag{14.2.1d}$$

我々が得た式が，直感に合う何かを表わしていることを見るには，さまざまな方法がある．たとえば，質量 $m(r)$ が非常に大きくは決してならない場合，圧力はニュートンの法則に基づき変化する．

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{m(r)}{r^2}\rho \tag{14.2.2}$$

興味深いのは核子の総数である．単純に $4\pi\int dr\, sr^2$ と書きたくなるかもしれないが，不変な表現で書くべきであることを思い出さなければならない．真の値は

$$N = \int_0^{r_0} s^4\sqrt{-g}\, dr\, d\theta\, d\phi, \qquad \sqrt{-g} = e^{\nu/2}e^{\lambda/2}r^2\sin\theta \tag{14.2.3}$$

ただし s^4 は 4-ベクトル s^μ の時間成分である．その値を計算し，核子が静止している座標系で積分を行なえばよい．この系では時間成分のみがゼロでない値をもち

$$s^\mu s_\mu = (s)^2 = g_{44}s^4s^4, \qquad s^4 = se^{-\nu/2} \tag{14.2.4}$$

となる．したがって核子の総数は

$$N = 4\pi\int_0^{r_0} dr\, sr^2[1-2m/r]^{-1/2} \tag{14.2.5}$$

再度，星の質量に対する表式を見て，より完全な理解を得ることにしよう．密度 ρ は 2 つの項，つまり質量エネルギー s と放射エネルギー ϵ の和である．質量を，不変体積要素の積分として具体的に表わしたとすると，密度には平方根の因子がかかる．

$$m \leqq m_0 = 4\pi\int_0^{r_0}\frac{r^2dr}{\sqrt{1-2m/r}}\rho\sqrt{1-2m/r} \tag{14.2.6}$$

これはまさに，相対論で予想されることである．平方根がエネルギー密度の，重力エネルギーによる補正を表わす．

温度が 10^9 K よりも高くなると，このような高温で起こりうる新しい過程により，我々の状態方程式がまったく意味のないものにならないかどうか，注意する必要がある．たとえば，一対のニュートリノが電子-電子衝突で生成されると，それらは多量のエネルギーを持ち去るので，我々の近似が成り立たなくなるかもしれない．このような過程は，かなりの粒子が電子対を作れるほどの運動エネルギーをもつ温度である 10^9 K で，重要になるかもしれない．電子対を作る可能性があると，s と ϵ の関係，そして ϵ と p の関係が変わる．しかし断熱近似のもとでは，関係は γ という量で完全に指定され(圧力 p は s^γ に比例する)，温度が変わっても γ はあまり変化しないことがわかる．γ は両極限 $T\to 0$ と $T\to\infty$ で，$\gamma=1.333$ という同じ値をとる．その中間で最低値になるが，それは $\gamma=1.270$ である．したがって電子対による補正では，我々の解の定性的性質は変わらないと思える．

14.3　数値的結果

τを一定とし中心の温度のみを変化させたときの，予備的な計算結果を表14.1に示す．表には，温度t_c，半径r_0，星の質量m_0，および核子数Nが記してある．これらの数字にどのような意味があるだろうか．星の変化を知るために，核子数一定のまま1核子当たりのエネルギーが減ると，半径と中心の温度はどうなるかをみてみよう．これは，エネルギーをゆっくり放出する星をシミュレートすることになると思われる．表の数字は確信がもてるほど十分ではないが，それでも，核子当たりのエネルギーが減ると中心の温度も減る，つまり星はエネルギーが放出されると実際に冷えることがわかる．

表 14.1

t_c	r_0	$2m_0$	$2N$
0.01	1100	8.45	8.45
0.10	114	6.23	6.19
0.20	59	4.71	4.62
0.40	36	3.13	2.97
0.60	28	2.39	2.19
1.00	32	1.87	1.66

この星は自然に膨張していくだろうか．この星の安定性はまだ調べられていない．我々が得た解を使い，ある一定の核子数とτを与える場合の，半径と中心温度の関係を比較してみよう．t_cが0.40と1.00の間に，半径の最小値がありそうだという事実は，非常に示唆的である．この星には安定な状態があるかもしれない．安定性を調べるもう一つの方法は，「爆発」の考察である．1核子当たりのエントロピーつまりτを一定とし，総数Nの核子の全エネルギーを計算する．次にその星を，核子総数Nを一定にしたままτが等しい2つの星に分割する．分割により仕事が得られるだろうか，あるいは分割するには仕事が必要だろうか．すべての物質は同じ初期分布から凝縮すると仮定するので，τは一定とする．数値から何がわかるだろうか．Nが減少すると，質量の増加がいっそう大きくなっている．つまり，小さなNをもつ2つの天体は，その2つまとめたものよりも重い．このシステムを分割するには仕事がいるのだ．星は物質を放出せず，一つの固まりとしてまとまっていることが示唆される．

■以下の議論には，ファインマン自身もこの講義のすぐ後で気づいたと思われる誤りが含まれている．詳しくは177ページ以降を参照．

以上の考察は，このモデルに従う星が実際には形成されえないことも示している．核子の静止質量よりもエネルギーが大きいので，星としてまとめるにはエネルギーがいるからである．

いずれにしろ，一般相対論による補正は大きく，非常に重要だということがわかる．電子対の影響は，この解をどの方向に変えるだろうか．電子対は星を，外部が冷えるにつれ中心でより熱くさせる傾向にある．

重力半径について問題が起きるだろうか．我々は，$m(r)$は中心で0であり，外部に向けて増えていくように式を作った．質量が大きくなりほとんど$2m(r)=r$となったとすると，式(14.1.10d)から，rの臨界値の近くではtは対数的に$-\infty$になることがわかる．

したがって，そうなる前に温度はゼロに下がり，我々の方式ではそこで計算を止める．しかし質量や半径に対する数値的な結果は臨界値からは非常に遠いので，今のところこの問題に悩む必要はなさそうである．

14.4　スーパースターの今後の研究プロジェクトと推測

スーパースターの問題を取り扱うには，別の数学的方法もある．星の中の総核子数は

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{sr^2 dr}{\sqrt{1-2m/r}} \qquad (14.4.1)$$

で与えられることがわかった．ただし，

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr' \rho r'^2$$

であり，$\rho=\rho(s)$ は，たとえば「断熱的」

$$s\frac{d\rho}{ds} = p+\rho \qquad (14.4.2)$$

といったような状態方程式を仮定することでわかる．平衡状態を求める問題では，核子数一定として質量最小の配置を決定したい．質量を一定としたときの最大核子数を求めることでも，同じ情報が得られる．数学の式としては，

$$\frac{\delta N}{\delta s(r)} = 0 \qquad (14.4.3)$$

という変分方程式となる．もしこれが解ければ，極値を与える関数解 $s(r)$ が求まる．非常に複雑な問題でも，適切な原理を使うことで簡単な形になっていくのを見ると安心できる．極値 $N[s(r)]$ が真に最大だとすれば，最低質量の解が求まったことになるのだ．

静的な解を研究した後は，完全に動的な問題に移ることもできる．微分方程式は恐ろしく複雑なものになる．その複雑な構造を見て古典的な極限との比較をすると，多くの項の意味が明らかになる．すべてを気体として扱う最も単純な場合，方程式は不均質な物質中の音の伝播を表わす．非線形な音なので，衝撃波にもなりうる．状況が複雑なのは当然である．より控え目な研究としては，静的な解の周りの小さな揺らぎを調べることがある．振動数が実数ならば，静的な解はいったん形成されれば真に安定であることになるが，振動数が虚数になるとすれば，解が不安定であることを意味する．

詳しい計算をするには，方程式の「物理的」側面についても，よりよい説明が必要となる．もしニュートリノを星の中心から取り出したら，何が起こるだろうか．この星は凝縮を続けるだろうか．非常に相対論的な場合，ニュートリノが全エネルギーのうちのかなりの部分を持ち去り，重力が減少するかもしれない．古典的な場合，つまり粒子の静止質量がエネルギーのほとんどすべてを占めている場合の星の理論は，かなり堅固なものである．このような場合，星の中心からのエネルギーの消失は崩壊を推し進め，中心部はさらに熱くなる．中心部が熱くなると，原子核反応によりさらにエネルギーが供給される．星が安定であり続けるためには，そのエネルギーは運び去られなければ

ならない．しかし中心部が十分に熱くなり，運び去られるよりも多くのエネルギーが原子核の燃焼によって供給されると，星は不安定になり爆発する．しかし，放射エネルギーが総質量の大きな部分を占める非常に相対論的な状況では，定性的に新しい特徴が現われ始める．エネルギーの消失により中心部が「冷却」すると，質量のかなりの部分がなくなるので重力も減る．したがって，質量が十分に大きい場合には，爆発に結び付くプロセスが存在しなくなるかもしれない．

質量が太陽質量の 10^8 倍よりも大きい場合，凝縮する物質に対する以上の問題の球対称な解は，星は崩壊するのではなく，ある最も望ましい半径を中心として振動することを示唆するだろうと，私は予想する．もし分布が球対称でなくなると，通常の星の進化のプロセスが起こるだろう．このようにして，恐らく目に見えるすべての星がほぼ同じ大きさをもつようであるという事実の説明が得られる．完全に動的な問題の解は，一様に分布している物質が球対称に凝縮し始め，そしてある時点で，さらに凝縮する密な部分が形成し始めるということを説明するかもしれない．結果は，凝縮する質量が最初にもつ角運動量の大きさに，大きく依存するだろう．たとえば，惑星は太陽系の全角運動量のほぼ 95% を含んでいる．凝縮する質量は，角運動量の大部分を運ぶ固まりを形成するのかもしれない．

第15章

15.1　シュワルツシルト解の物理的トポロジー

これまでの講義で，現実の物質分布は，重力半径 $2m$ よりも小さな大きさには凝縮できないという示唆を得た．暫定的に，「ワームホール」は現実の物質からは形成されえないと結論づけたとしても，テンソル $G^{\mu}{}_{\nu}$ が至るところでゼロであるような場合，つまり遠方から見たときに物質は物質のように見えないという場合を，シュワルツシルト解が本当に表わしているかどうか，その疑問は残る．そこで，シュワルツシルト解を臨界半径 $2m$ の内部に延ばすことを考えよう．

■現在では，半径が $2m$ より小さい天体（ブラックホール）も存在しうることがわかっている．付録 A 参照．

$$(ds)^2 = (1-2m/r)(dt)^2 - \frac{(dr)^2}{(1-2m/r)} - r^2\Big((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\phi)^2\Big) \tag{15.1.1}$$

という計量は $r=2m$ で見掛け上の特異点をもつが，この点で曲率は滑らかである．曲率は原点 $r=0$ で特異になるので，原点では空間に何か恐ろしいことが本当に起こっている．曲率が特異な結果として潮汐力が無限大になるので，原点に落ち込む宇宙船は破滅的に歪むだろう．しかし，$r=2m$ で起こるのは単に，式 (15.1.1) で $(dt)^2$ と $(dr)^2$ の係数の符号が変わるだけであり，時空は相変わらず 3 プラス 1 次元なので，何も特に変わった感じがしない．

特異点付近の空間の膨張について考えてみよう．$r=2m$ 付近の座標を変え，$d\phi=0$，$d\theta=0$ という平面を考える．新しい変数 x を使うと特異点付近では

■ここでは，見掛け上の特異点．

$$\begin{aligned} x &= (1-2m/r), \\ r &= 2m(1+x) \qquad (x\text{ が小さいとき}) \\ (ds)^2 &= x(dt)^2 - (2m)^2\frac{(dx)^2}{x} \end{aligned} \tag{15.1.2}$$

この時空では x が符号を変えると計量の符号も変わるが，$x>0$ では計量をさらに変更して平坦にすることができる．つまり，簡単な変数変換によって極座標の形

$$x = R^2 \rightarrow (ds)^2 = R^2(dt)^2 - (4m)^2(dR)^2 \tag{15.1.3}$$

になり，これはさらに

$$\begin{aligned} v &= 4mR\cosh(t/4m), \\ u &= 4mR\sinh(t/4m), \\ &\rightarrow (ds)^2 = (du)^2 - (dv)^2 \end{aligned} \tag{15.1.4}$$

■ $r=2m$，つまり $u, v=0$ で，この計量には何も特異性はない．

という置き換えをするとミンコフスキー計量になる．以上の結果は，この特異点付近の時空の振る舞いは完全に正常であり，シュワルツシルトの特異性は，使った座標の特殊性に過ぎないことを示している．$r=2m$ を通る測地線を接続するためには，式 (15.1.4) により，置き換え

$$x = \left(1-\frac{2m}{r}\right) = -\frac{(u^2-v^2)}{(4m)^2}, \qquad \frac{u}{v} = \tanh\left(\frac{t}{4m}\right) \quad (15.1.5)$$

をすればよいことがわかる．座標 u と v を使えば，時空も計量も $r=2m$ の両側で滑らかである．これに似た置き換えは，ファラーとウィーラー [FuWh 62] がこのギャップを越えるために使っている．$r=2m$ を越えて接続された測地線によれば，臨界半径 $2m$ より小さな天体に落ち込む粒子は，くびれの反対側にある「新しい」空間に出てくることはなく，原点に向けて落ち続けることがわかる．これは，ワームホールに関する議論と矛盾しない．くびれのようなトポロジーは，$dt=0$ という，時空を特別の断面で見たときに得られたものである．しかし現実の粒子の動きは，$dt=0$ という断面内で起きているわけではなく，$dt=0$ の空間のトポロジーが，四次元時空の一般的な性質に対応していなければならないという理由はない．断面が放物面だとしても，時空全体が放物面的性質をもつわけではない．物理の問題で重要なトポロジーは，測地線に関係するものである．そして，ワームホールを通る時間的測地線は存在しない．

15.2　シュワルツシルト時空での粒子の軌道

粒子の動径方向の動きを時間の関数として解くことは，教育上格好の問題である．中心力問題での常として，運動は単一の平面内で起こり（ここではそれを $\theta=\pi/2$ とする），動径方向の運動は，全エネルギーと角運動量に関係する二つのパラメーター K と L によって決まる．それぞれ，時間の微分方程式と角度の微分方程式の第一積分である．測地線の方程式

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} \quad (15.2.1)$$

は $\nu=3, 4$（座標は ϕ と t）の場合には簡単に積分できる．計量テンソルが ϕ と t に依存しないので，式 (15.2.1) の右辺はゼロだからである．これらにより，以下の積分が定義される．

$$K = (1-2m/r)\frac{dt}{ds}, \qquad L = r^2\frac{d\phi}{ds} \quad (15.2.2)$$

動径方向の方程式は式 (15.2.1) で $\nu=1$ とすれば得られるが，これは必要でない．動径方向の方程式は，条件

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad (15.2.3)$$

から求めた方が簡単である．この条件は L と K を使って

$$\frac{K^2}{(1-2m/r)}-\frac{1}{(1-2m/r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{L^2}{r^2}=1 \qquad (15.2.4)$$

と具体的な形で書ける．粒子が r_0 から r_1 まで落ちるときにかかる固有時間は，

$$\int ds=\int_{r_0}^{r_1} dr\left(K^2-(1-2m/r)(1+L^2/r^2)\right)^{-1/2} \qquad (15.2.5)$$

で与えられる．$r=2m$ で何も特別なことは起きないことに注意してほしい．被積分関数の振る舞いは正常で，ギャップでの接続の問題など生じない．計量ではなく最初から軌道を調べていたら，シュワルツシルトの特異性には気づきもせず，(15.2.5) を使って正しい答を得ていただろう．

平方根の意味は通常の軌道の場合と変わらない．積分は平方根が虚数になる点で止めなければならない．粒子は決して，それよりも内側には入り込まない．もし角運動量 L が十分に大きかったら，平方根は $2m$ よりも大きな距離で虚数になり，軌道はニュートン力学の場合と定性的に同じになる．一方，もしエネルギーと角運動量が，粒子が距離 $2m$ を越えるような値だったら，平方根は内部でも虚数にならず，すべての粒子が原点に向けて落ち続ける．実際，いったん $r=2m$ の内部に入ったら，角運動量 L が大きい粒子ほど速く落下し，「遠心力」は斥力というよりは引力として働く．

ここで，シュワルツシルト計量は，荷電した物体が遠方で作る計量に対応すると仮定して得られる，特別な結果に言及しておきたい．電荷による計量の変更は，q を見かけの電荷として

$$(1-2m/r)\rightarrow(1-2m/r+q^2/r^2) \qquad (15.2.6)$$

という置き換えだけであることを，容易に示すことができる．この置き換えを固有時間の式 (15.2.5) で行なうと，平方根は距離が十分に小さいとき必ず虚数になってしまい，粒子は決して原点には落ち込まず，常に跳ね返ることがわかる．この反発は粒子間の電気力によるものではない．この計量が，原点に荷電粒子がある場合の遠方での計量に相当するとした必然的な結果である．この反発力は，電荷がある原点に落ち込む，中性の粒子でさえも感じる．

電荷をもつ物体が作る計量，式 (15.2.6) は明らかに特異点が二カ所にある．これら二つの特異性を越えて落ちる粒子の測地線を接続するという問題は，興味深い．粒子が跳ね返ってくる時刻が粒子が落ち込むよりも早いということだって，あるかもしれない．このようなことを言うのは，落ちていく粒子が(外から見たときの)最初の特異点に達するのに無限の時間を必要とするのに，粒子自体の観点から見ると，粒子は軌道全体を有限の時間で通るからである．

■後に，粒子は「別の宇宙」へ跳ね返ることがわかった．185 ページ参照.

15.3　幾何力学の将来について

シュワルツシルト解についてのこれまでの多くの議論は，我々の理

論がまだ完全には調べられていないという事実の反映でもある．そろそろ別の問題に移るべきだろうが，解答はどのようなものになるか，ここで私の想像を述べておきたい．ワームホールに関する J. A. ウィーラーの最初の推測は，至るところで $G^{\mu}{}_{\nu}=0$ であるが，これが真の物質であるかのように振る舞うアインシュタイン方程式の解を作ることができるかもしれないという考えに基づいていた．ワームホールのトポロジーは，電気力線がワームホールに入っていき，どこか別の場所のワームホールから出てくるというものであり，正確に同じ大きさのプラスの電荷とマイナスの電荷が存在することと見事に対応している．我々はすでに，測地線の空間のトポロジーはワームホールのトポロジーではないことを示したが，物質や電荷が時空のトポロジーの発現であるという考えは，非常に美しく魅力的である．そして，この考えはシュワルツシルト解に適用したとき何も定量的な結果をもたらさないからといって，否定されるものではない．至るところで $G^{\mu}{}_{\nu}=0$ であるということは非常に美しく，幾何力学を表わすために最近使われた言葉によれば，物質は物質がない所から出現し，電荷は電荷のない所から出現するのだ．

シュワルツシルト解の原点 $r=0$ での性質は，すぐに調べるべきである．至るところで $G^{\mu}{}_{\nu}=0$ であるとはきっと証明できず，むしろ，$G^{\mu}{}_{\nu}=\delta(0)$ のようなものになるのではないかと私は想像する．電荷の振る舞いの説明は，さらに詳しい研究が必要だ．私は，原点での「斥力」は，点電荷という矛盾するものを仮定したことによる誤った結論だろうと考える．なぜなら点電荷の回りのエネルギー密度は E^2 つまり $1/r^4$ に比例するので，有限な半径内に含まれる質量は無限大になる．内部の質量が無限大ではありえないとすれば，

$$\text{内部の質量} = (\text{定数})-\frac{q^2}{2r} \qquad (15.3.1)$$

とでもしなければならない．いかなるところにもマイナスの質量は存在しないとすれば，a を (定数)$=q^2/2a$ という関係で定義したとき，半径 a の領域内を考えることはできない．質量の起源が電磁的なものだけではないとすれば，この定数の大きさは任意である．半径 a の外側では，重力場とポテンシャルは，

$$\text{重力場} = -\frac{q^2}{2r^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right),\quad \text{ポテンシャル} = \frac{q^2}{2r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2r}\right) \qquad (15.3.2)$$

この定数が有限だとすれば，反発力はありえない．新しい座標 u と v を使うと，現実の世界全体を一度に表わすことができ，落下する粒子の測地線は $r=0$ の壁にぶつかる．最初に問題であった $r=m+\sqrt{m^2-q^2}$ のギャップは，普通の領域に過ぎず，測地線は折れ曲がることさえない(図 15.1 参照)．質量をどんどん小さくしていったときのこの電荷の幾何を調べることは，非常に興味深い．

J. A. ウィーラーと彼の共同研究者たちが発展させた幾何力学は，

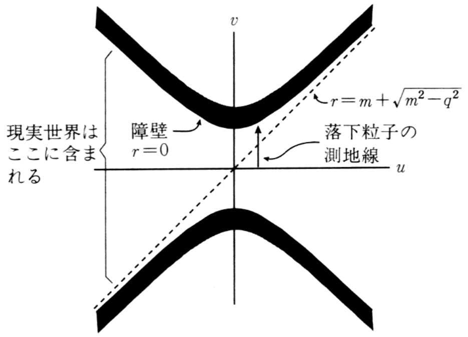


図 15.1

定量的な結果は何ももたらさなかったが，我々の物理には見事な成功をもたらすかもしれない大胆な想像の種(たね)を含んだものである．我々がもつ理論の中の，まだ調べられていない有望な部分を真に知っているという点で，ウィーラーが優れていることを認めなければならない．彼の助手だったとき私は幾度となく，どの方向に解答が見つかるのか判断できる彼の天才的直感力の助けを受けた．あるとき私は，電荷は場とではなく，他の電荷とのみ相互作用するという古典電磁気学の理論を組み立てようとしていた．私は場というものは，遅延効果の追跡手段として以外には消え去るべきだと感じていたのだ．放射の問題を説明する段になるまでは，すべてがうまくいっていた．この問題では，場が他の電荷との間を往復する時間が経過するはるか以前に，加速している粒子は力を感じる．この困難を話したときウィーラーは，「君はなぜ先行ポテンシャルを使わないのかい」と答えた．先行ポテンシャル，….これは，誰もが無意味だと捨てていたものだ．明らかに物理的意味に欠けたものだった．それを使うことを勧めるというのは，勇気のいることだった．しかしその後，それを使った定量的理論が作られた．遅延ポテンシャルの半分と先行ポテンシャルの半分とを使った，電荷は他の電荷にのみ作用するという電気力学である．

あるとき私は，真夜中に彼からの電話を受けた．彼は私に，「電子と陽電子が同じ電荷をもつ理由がわかった．それは同じ電子なのだ」と話した．彼の考えは，もしある物体が時空内で非常に複雑な世界線を描いているならば，現在という空間の多くの場所で，その物体を見

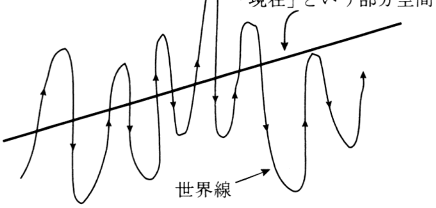


図 15.2

ることができる(図 15.2 参照). その後私は，陽電子を，位相が過去に向かって進む電子であると解釈することによって，この種のアイデアを定量的なものにすることができた. そして，粒子対の消滅や生成を含む行列要素を計算する，簡単な方法を開発した. ワームホールや幾何力学についてのアイデアが実現され，我々の自然に対する理解を深めることができれば，本当に素晴らしいことだろう. ウィーラーのことを知っている私には，いつか彼の直感が立証される可能性も大いにあると思える.

以上，現在興味をもたれている問題についてのコメントをして，重力の古典論についての議論を終えることにする.

第 16 章

16.1 物質場と重力との結合

第 10 章で我々は，自由な粒子と場の伝播に対応する作用を書き下した．これを完全な作用にするには，場の間の結合を加えなければならず，それをすればさまざまなプロセスの摂動論による計算に進むことができる．摂動論を使うことに弁解する必要はない．重力は他の場に比べてはるかに弱いので，摂動論による予言はきわめて正確だと思われる．一般的な作用の形は，

$$-\frac{1}{2\lambda^2}\int d^4x\sqrt{-g}R+\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-m^2\phi^2)$$
$$-\alpha\int d^4x\sqrt{-g}R\phi^2 \qquad (16.1.1)$$

第一の単純化として係数 α をゼロとする．このような項を作用に残しておくと通常は，我々が後で出会う発散に関する多くの問題をさらに悪化させ，計算の苦労が増える．現在の実験からはこの係数の大きさは任意なので，計算が最も単純になる値を選ぶ．第二段階は

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+2\lambda h_{\mu\nu} \qquad (16.1.2)$$

という展開をして，場の伝播を表わす項を引き出すことである．

場 $h_{\mu\nu}$ とスカラー場 ϕ を使って作用を書き表わすと

$$\text{作用}=\int d^4x\,F^2[h_{\mu\nu}]+\int d^4x\,I[h_{\mu\nu},\phi]+\int d^4x\,M[\phi] \qquad (16.1.3)$$

ただし

$$F^2[h_{\mu\nu}]=\frac{1}{2}[h^{\mu\nu,\lambda}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\lambda}-2\bar{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu}]$$

$$M=\frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-m^2\phi)$$

$h_{\mu\nu}$ または ϕ についての関数 I の変分が，その場の微分方程式の湧き出し項を表わす．方程式は座標表示と運動量表示でそれぞれ，

$$\Box^2\phi-m^2\phi=-\left(\frac{\delta I}{\delta\phi}\right)\to\phi=-\frac{1}{(k^2-m^2+i\epsilon)}\left(\frac{\delta I}{\delta\phi}\right)$$

$$-h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda}+\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda}+\bar{h}_{\nu\lambda,\mu}{}^{,\lambda}=\lambda\bar{S}_{\mu\nu}\quad \text{ただし}\quad S^{\mu\nu}=-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\delta I}{\delta h_{\mu\nu}}\right)$$
$$(16.1.4)$$

となる．$S_{\mu\nu}$ は第 6 章で ${}^{\text{new}}T_{\mu\nu}$ と呼んだものであることに注意(式 (6.

1. 2) 参照). これらの式から何ができるだろうか. 最初の作用が不変積分として注意深く作られているので, 湧き出し項 $S_{\mu\nu}$ の通常の発散は恒等的にゼロになる. 運動量表示では

$$k^{\nu}S_{\mu\nu}=0 \tag{16.1.5}$$

湧き出しテンソルは, 物質場による湧き出しと重力場による湧き出し双方を含む. ゲージの自由度があるので, バー付きテンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ を発散なしとすることができ, そうすると

$$k^{\nu}\bar{h}_{\mu\nu}=0\rightarrow k^2h_{\mu\nu}=\lambda\bar{S}_{\mu\nu},\qquad h_{\mu\nu}=\frac{\lambda}{k^2+i\epsilon}\bar{S}_{\mu\nu} \tag{16.1.6}$$

という解が求まる. 右辺のテンソルは, もはや単なる未知の湧き出しテンソルではなく, 最初の作用 (16. 1. 1) と, 展開式 (16. 1. 2) を使って具体的に定義され, 方程式はつじつまが合っておりエネルギーは保存する. 結合定数 λ のベキで展開すれば, λ についての任意のオーダーまでのすべてのダイアグラムの計算を, おなじみの摂動論の規則によって進めることができる. ポイントとなるのは, $g^{\mu\nu}$ と $\sqrt{-g}$ の展開である. 前者は, x が小さいときの $(1+x)^{-1}$ の展開との類似で, 容易に書き下せる. つまり,

$$g^{\mu\nu}=(\eta_{\mu\nu}+2\lambda h_{\mu\nu})^{-1}=\eta^{\mu\nu}-2\lambda h^{\mu\nu}+4\lambda^2h^{\mu}{}_{\beta}h^{\beta\nu}-8\lambda^3h^{\mu\beta}h_{\beta\tau}h^{\tau\nu}+\cdots \tag{16.1.7}$$

式 (4. 1. 6) と同様の, 平坦な時空での和の書き方を使っている. $\sqrt{-g}$ に対する公式は, 第 6 章のトリックを使って計算することができる. 式 (6. 3. 11), および

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\beta}(\delta^{\beta}{}_{\nu}+2\lambda h^{\beta}{}_{\nu})$$

を使うと

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-\mathrm{Det}\,g_{\mu\nu}}\\
&\quad=\sqrt{-\mathrm{Det}\,\eta_{\mu\beta}}\exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log(\delta^{\beta}{}_{\nu}+2\lambda h^{\beta}{}_{\nu})\right]\\
&\quad=\exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(2\lambda h^{\beta}{}_{\nu}-\frac{1}{2}(2\lambda)^2h^{\beta}{}_{\tau}h^{\tau}{}_{\nu}+\frac{1}{3}(2\lambda)^3h^{\beta}{}_{\tau}h^{\tau}{}_{\sigma}h^{\sigma}{}_{\nu}+\cdots\right)\right]\\
&\quad=\exp\left[\frac{1}{2}\left(2\lambda h^{\beta}{}_{\beta}-\frac{1}{2}(2\lambda)^2h^{\beta}{}_{\tau}h^{\tau}{}_{\beta}+\frac{1}{3}(2\lambda)^3h^{\beta}{}_{\tau}h^{\tau}{}_{\sigma}h^{\sigma}{}_{\beta}+\cdots\right)\right]\\
&\quad=1+\lambda h^{\beta}{}_{\beta}-\lambda^2(h^{\beta}{}_{\rho}\bar{h}^{\rho}{}_{\beta})+\cdots
\end{aligned} \tag{16.1.8}$$

となる. これらの $\sqrt{-g}$ と $g^{\mu\nu}$ の展開を作用に代入すれば, 物質と重力の結合の具体的な形が求まる. たとえば式 (16. 1. 1) の第 2 項からは

$$\begin{aligned}
S_m&=\frac{1}{2}\int[(\eta^{\mu\nu}-2\lambda h^{\mu\nu}+(2\lambda)^2h^{\mu\beta}h_{\beta}{}^{\nu}+\cdots)(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})-m^2\phi^2]\\
&\qquad\times(1+\lambda h^{\rho}{}_{\rho}-\lambda^2(h^{\sigma}{}_{\rho}\bar{h}^{\rho}{}_{\sigma})+\cdots)d^4x\\
&=\frac{1}{2}\int d^4x(\phi^{,\mu}\phi_{,\mu}-m^2\phi^2)-\lambda\int d^4x\,h^{\mu\nu}\left[\overline{\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}}+\frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu}\right]\\
&\qquad-\lambda^2\int d^4x\left[\frac{1}{2}h^{\lambda}{}_{\rho}\bar{h}^{\rho}{}_{\lambda}(\phi^{,\mu}\phi_{,\mu}-m^2\phi^2)-2h^{\mu\rho}\bar{h}_{\rho}{}^{\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\right]
\end{aligned} \tag{16.1.9}$$

最低次の項は，2つのϕと1つのhとの相互作用を含んでいる．これは，図16.1(a)に示されているような頂点を表わす．各頂点で運動量が保存することを要求する．この規則は作用の体積積分からくる．つまり，全位相がゼロでない項は寄与しない．偏極テンソル$e_{\mu\nu}$を使って平面波解を

$$h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}e^{iq\cdot x},\qquad \phi=e^{ip\cdot x};\tag{16.1.10}$$

と書くと，1次の頂点による振幅は

$$-2\lambda\left[e^{\mu\nu}\,{}^1p_\mu\,{}^2p_\nu-\frac{1}{2}e^\rho{}_\rho({}^1p_\tau\,{}^2p^\tau-m^2)\right]\tag{16.1.11}$$

このような頂点のみを含むダイアグラムは，電気力学の場合のように，各頂点にこの振幅を，また頂点間には粒子と重力子の伝播関数を挿入することで計算できる．

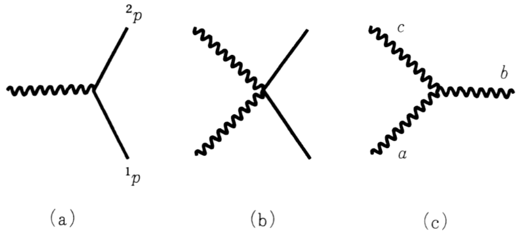


図16.1

次に2次の摂動を考えよう．式(16.1.9)に示されている項は，2つのhと2つのϕの積を含むので，図16.1(b)に示されているように，2本の実線と2本の波線が頂点に集まる．3つのhが関わる式(16.1.1)の第1項の展開からくる項もあり，図16.1(c)に示されているように，3本の波線が頂点に集まる．3つの添字についての複雑な和があるので，具体的に書き下すと非常に，非常に長くなる．たとえば，3本の波線が集まる項の1つは$h_{\mu\nu,\beta}h^{\mu\beta}h^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}$となり，運動量と偏極テンソルで表わすと，次のように3つの重力子のすべての互換に対応する項が出てくる．

$${}^aq_\beta\,{}^ae_{\mu\nu}\,{}^be^{\mu\beta}\,{}^cq_\alpha\,{}^ce^{\nu\alpha}+{}^bq_\beta\,{}^be_{\mu\nu}\,{}^ae^{\mu\beta}\,{}^cq_\alpha\,{}^ce^{\nu\alpha}+{}^bq_\beta\,{}^be_{\mu\nu}\,{}^ce^{\mu\beta}\,{}^aq_\alpha\,{}^ae^{\nu\alpha}+\cdots\tag{16.1.12}$$

1つの頂点にこの複雑さがあるが，これは振幅の半分に過ぎない．た

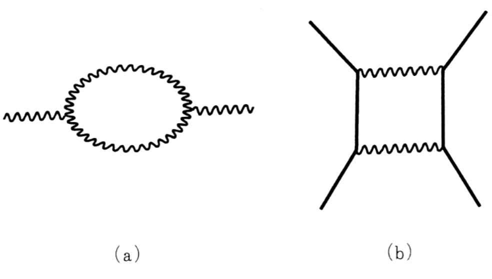


図16.2

とえば図 16.2(a) に示されているダイアグラムのように複雑さを組み合わせると，108 個もの項が出てくることがある．

16.2 理論の完成——重力放射の単純な例

前節で，理論の概要全体を説明した．残るのは，電気力学で使われたのと同じ規則を使っての，各プロセスに対応するダイアグラムの計算である．第 4 章で，ごく単純なダイアグラムの例をいくつか計算した．たとえば 1 重力子交換の散乱振幅は，式 (4.3.5) で与えられる．実際には，表式を適切に対称化する際に注意が必要だが，少し練習すれば簡単にできるようになる．バーを付けた短縮形を使うことが，計算を簡略化するのに役立つ．

最低次では，以上の方式で理論は完全である．すべてのプロセスはツリー・ダイアグラムで表わされ，何も問題は起こらない．ツリー・ダイアグラムとは，図 16.2 に示されているようなループを含まないものである．木(ツリー)の枝は，決してもとに戻って輪の形にはならないということから，このように呼ばれる．

高次ではダイアグラムにループが現われるが，おかしな結果が出てくるという意味で理論は不完全である．この困難を救う方法は，1 ループに対してのみ成功した．この方法について議論するにはまず，同じ困難があるが取り扱いははるかに容易なヤン-ミルズ理論を少し学んでおくのがよい．困難のある部分は，ダイアグラムの総和に対するユニタリティの欠如と関係している．後で，さまざまなダイアグラムの間に成り立つ一連の関係式についての議論しよう．これらは重力についての実験で直接確かめることはできないが，中には，他の場の理論の話ですでになじみ深いものもある．

複数のループを含むダイアグラムでの困難を解決する方法があるのかどうか，私は知らない．多分ないと思う．つまり，この理論は繰り込み可能ではないと思う．繰り込み可能でないことが理論にとっての真に重要な問題点なのか，それは私にはわからない．

最も興味深い問題は，おそらく重力波の放出だろう．最初の例として，粒子が崩壊するときの重力子の放出を考える．ここでは物質はスカラー理論を使っているので，$K \to 2\pi$ などのスカラー粒子の崩壊を頭に入れるとよい．「崩壊が起きた」と外部の世界に重力によって伝えるには，長波長の重力子の放出が必要である．この崩壊では電荷が加速されるので，低エネルギーの光子が放出されるのと同様である．可能な多くのダイアグラムの中で，重力子が崩壊の頂点から出てくるものはふつう非常に小さいので，最初は考える必要はない．練習問題として，図 16.3 に示されている残りの 3 つのダイアグラムを計算するとためになるだろう．

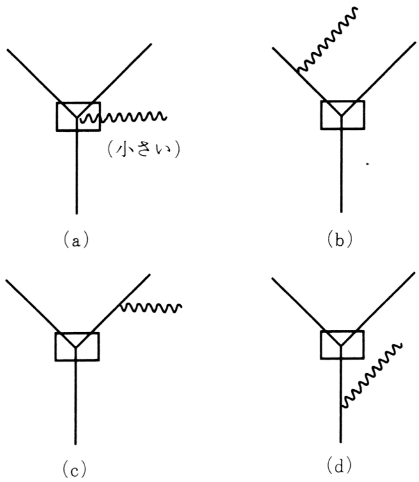


図 16.3

16.3　粒子の崩壊における重力子の放出

重力子と物質の結合は非常に小さいので，粒子の現象に付随する量子重力の効果が観測できる可能性はまったくない．その意味では，これからしようとしている計算は現実的なものではない．しかし我々は具体的な理論を提示したのであり，この観測不可能なプロセスが，我々の理論が予言する最も単純な効果でもある．もし結合定数がもっと大きかったら，これは観測可能で重要なプロセスになっていただろう．

粒子の崩壊には，1 重力子ダイアグラムがたくさんある．例として，図 16.4 の $a \to b + c$ というプロセスを考える．a-重力子頂点の振幅は

$$-2\lambda e^{\mu\nu}\left[{}^{1}p_{\mu}{}^{2}p_{\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}({}^{1}p_{\alpha}{}^{2}p^{\alpha}-m^{2})\right] \qquad (16.3.1)$$

ここで，前付きの添字 1 と 2 は，頂点の前および後の物質粒子を表わす．放出後，粒子 a は運動量 $({}^{a}p-k)$ をもって崩壊の頂点まで伝播するので，${}^{2}p^{\alpha}=({}^{a}p-k)^{\alpha}$ とする．崩壊の振幅はブラック・ボックスに入ってくる 3 粒子 (a, b, c) の運動量に依存するが，それを A と記すことにすると，振幅全体は

$$-2\lambda e^{\mu\nu}\left[{}^{a}p_{\mu}({}^{a}p-k)_{\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left({}^{a}p\cdot({}^{a}p-k)-m_{a}^{2}\right)\right]$$

$$\times\frac{1}{({}^{a}p-k)^{2}-m_{a}^{2}}[A({}^{a}p-k, {}^{b}p, {}^{c}p)] \qquad (16.3.2)$$

A は重力がなかったときの崩壊を表わす量だが，ここでの目的のためにはその正確な振る舞いは重要ではない．

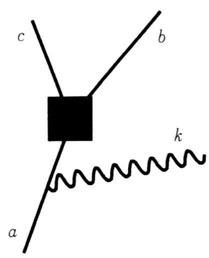


図 16.4

式 (16.3.2) は，伝播関数が非常に小さい，つまり k が ${}^{a}p$ よりも非常に小さく，ほとんど自由な粒子の伝播に対応している場合にのみ大きくなる．弱い重力子という極限では，このプロセスは弱い光子の制動放射，つまり「bremsstrahlung」と等価である．また，電荷(質量)

■ bremsstrahlung は，制御放射という意味の独語．

の流れに依存しているので，古典極限にも密接に関係している．分子は $-2{}^a p\cdot k$ であり，k の振動数 ω が非常に小さなとき分子では $k=0$ としてよい．λ/ω という量を取り出しておくと，残りは重力子の方向，その偏極および崩壊振幅にのみ依存する極限値をもつ．

$$\frac{\lambda}{\omega}\cdot\frac{e^{\mu\nu a}p_\nu{}^a p_\mu}{{}^a p\cdot k/\omega}\cdot A({}^a p, {}^b p, {}^c p) \qquad (16.3.3)$$

3 つの粒子 (a, b, c) のそれぞれからの重力子の放出に対応して，同様なダイアグラムが 3 つある．ブラック・ボックスから出る重力子に対応するダイアグラムは，ずっと小さいことがすぐに示せる．ほぼ自由な粒子がどこにも伝播していないので，全体を大きくするような分母がない．この項，そして高次の項をすべて無視すれば，重力子放出の振幅は

$$\frac{\lambda}{\omega}\cdot a\cdot A({}^a p, {}^b p, {}^c p); \qquad (16.3.4)$$

$$a=\sum_i {}^i p_\mu{}^i p_\nu(-)_i\frac{e^{\mu\nu}}{{}^i p\cdot(k/\omega)}$$

となる．ここで i は重力子頂点につながった粒子を指しており，$(-)_i$ は，入射粒子では $+1$，放出粒子では -1 とする．a は運動学的および幾何学的因子である．遷移確率を計算するには，振幅を二乗し，状態密度 $k^2dkd\Omega/(2\pi)^3$ を挿入し，規格化因子 $\pi/(2E_i)$ を掛ける．E_i とは各粒子のエネルギーである．結局，崩壊における重力子放出の確率は，

$$\mathcal{P}=a^2\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \qquad (16.3.5)$$

となる．λ^2 という因子のため，確率はきわめて小さくなり，霧箱でにしろ放電箱でにしろ，崩壊が観測されたときに重力子放出による反跳が測定される可能性はまずない．エネルギーの逆数 $1/\omega$ が掛かっているので，極めて低エネルギーでは確率は大きくなる．しかしこのことは現実にはほとんど意味がない．λ^2/ω が 1 近くなるためには重力子の波長が宇宙の半径の 10^{39} 倍ほどにもならなければならないからである．

ここまではスカラー粒子の理論を扱ってきたが，低エネルギー極限では，答は粒子のスピンには依らない．これは，低エネルギー極限では質量の流れ，質量の動きのみが問題となるからである．もちろん上記の答には赤外発散があり，重力子の放出確率は(そのエネルギーを問題にしなければ)発散する．しかしこの問題は，低エネルギー光子放出での赤外発散と同じものであり，低エネルギーの「bremsstrahlung」と同じ手法で解決するだろう．

16.4　粒子の散乱における重力子の放出

何らかのプロセスで 2 つの粒子が散乱するときも，低エネルギーの

重力子が放出されるかもしれない．このプロセスに関係する最低次のダイアグラムは，図 16.5 に示されている 3 つのタイプのものである．低エネルギー極限では (a) タイプのダイアグラム，つまり重力子が自由粒子に結合するプロセスのみ重要である．重力子の運動量 k が，交換される運動量 q よりもずっと小さい場合には，他の 2 つのプロセスはずっと起こりにくい．たとえば (b) では，ほとんど自由な粒子が伝播している部分がないので，小さな分母はない．(c) では，2 番目の伝播関数のオーダーは $1/(q-k)^2 \approx 1/q^2$ である．放出のみを問題とする限り，散乱過程全体の詳細は重要ではない．重力による散乱の場合には放出は起こらないという奇妙な論理で主張する人がいつもいるので，このことを強調しておきたい．このような主張には根拠はない．重力波の放出は完全に現実のものである．地球の公転も重力波の発生源である．この節では考察を粒子の散乱に制限する．惑星や恒星など大きな物体の運動に関しては古典極限で考えるのが適切だろう．重力は常に無視できるほど小さいわけではない．

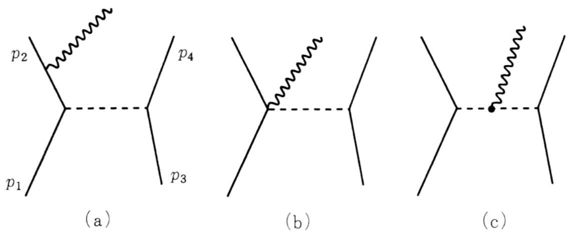


図 16.5

図 16.5(a) のようなダイアグラムに対応する 4 つの振幅の構造は，粒子崩壊の場合と同じである．重力子の偏極をテンソル e で表わすと，全振幅は，重力子がない場合の散乱振幅に比例し，エネルギー因子と，

$$a = \sum_i (-)_i \frac{p \cdot e \cdot {}^i v}{1 - {}^i v \cos\theta} \qquad (16.4.1)$$

という因子が掛かる．分母は，${}^i p \cdot k = E\omega - \vec{p} \cdot \vec{k}$ という積から，2 つの因子 E と ω を除いたものを表わしている．$\vec{p} = E\vec{v}$ である．上付き添字 i は，ダイアグラムの 4 本の外線それぞれを表わす．分子は偏極テンソル $e_{\mu\nu}$ と，それに結合する粒子の 2 つの運動量(放出前と後)との積を含む．運動量 2 つで作るテンソルが，スカラー粒子がもてる唯一の 2 階テンソルである．

得た答は，光子放出のものときわめて似てはいるが，本質的な違いがある．電磁気はベクトルに結合するが重力はテンソルに結合することである．高速で動いており $v \approx c$ である場合には，(16.4.1) の振幅は $\theta_i \approx 0$ のときに非常に大きくなる．一方，偏極テンソルは常に，重力子の運動量に対して直交している．電磁気でも，光子の偏極は運動量に直交する．分子には内積は 1 つしかないので，θ が小さくなり $v \approx c$ ならば

$$a_{\text{e.m.}} \to \frac{p \cdot e}{1-v\cos\theta} \propto \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \approx \frac{2}{\theta} \qquad (16.4.2)$$

角度が小さいときは光子の放出は非常に大きくなりうる．しかし実際には v は c に等しくはならないので，無限大になることはない．1つの粒子による強度分布は，図 16.6 に示されているように 2 つの突出部をもつ．一方，重力では結合はテンソルなので，二重に直交する．$\theta \to 0$ で $v=1$ のときは，

$$a_g \to \frac{p \cdot e \cdot p}{1-v\cos\theta} \propto \frac{\sin^2\theta}{1-v\cos\theta} \approx 2 \qquad (16.4.3)$$

となり，強度分布は前方でそれほど大きくならず，全体的には比較的一様である(図16.6(b))．スピンが 2 であるため，生成においてはスピン 1 の場合と比べて「横波」性が強くなるということから，この相違を直観的に理解できるだろう．

■「横波」性が強くなると，角運動量保存則のため前方への放出が抑えられる．

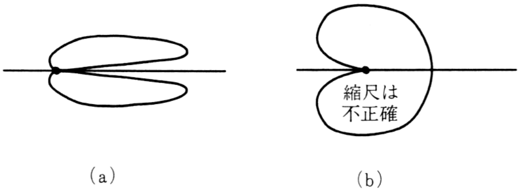


図 16.6

散乱に関わる粒子の 4 方向それぞれについて，図 16.6(b) のような角度分布をもつ振幅が 1 つある．重力子の放出強度は 4 つの振幅の和の二乗なので，一般には，かなり対称になる．

低速粒子 $v \ll c$ については，分母は特別の役割を果たさず，分布は分子で決まる．分子は 2 つのテンソルの縮約として表現できる．

$$\sum_i (-)_i {}^i p \cdot e \cdot {}^i v = e^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}, \qquad \alpha,\beta = x,y,z, \qquad (16.4.4)$$
$$S_{\alpha\beta} = \sum_i (-)_i p_\alpha v_\beta$$

放出の特徴は，衝突で生成される応力を表わすテンソル $S_{\alpha\beta}$ によって完全に決定される．その形はまさに，動く流体の応力に類似している．

$$\text{応力} = \rho v_\alpha v_\beta \qquad (\rho = \text{質量密度}) \qquad (16.4.5)$$

2 粒子の衝突の場合，応力 $S_{\alpha\beta}$ は，衝突粒子の平均速度(衝突前後の)を使って単純に書ける．運動量の移動を $Q=p_2-p_1=-p_4+p_3$ とする(図 16.5 参照)．また平均速度を

$$v = (p_2+p_1)/2m, \qquad v' = (p_3+p_4)/2m' \qquad (16.4.6)$$

とする．これらの組合せを使って適切な対称化をすると

$$S_{\alpha\beta} = 2(v'-v)_\alpha Q_\beta \qquad (16.4.7)$$

であることが容易にわかる．

この公式を使うと興味深い疑問に答えることができる．重い粒子と軽い粒子の衝突の際には，どちらからの放射が主に起こるのだろうか．公式によれば，もし $v' \ll v$ ならば，放射は v にのみ依存する．非常に軽い粒子が重い粒子にかする衝突では，重い粒子は常にほとんど静止していると考えることができる．この規則は，加速が速度のほぼ直角

方向の場合 ($\vec{Q}\cdot\vec{v}\approx 0$) に成り立つ．

上記の公式は，弾性衝突にも，あるいはいずれかの粒子を励起状態にする非弾性衝突にも適用できる．

16.5　古典的な重力波の発生源

次に，古典的な重力波の説明に進もう．量子力学の場合と同様，放出源は応力である．出発点は次の微分方程式である．

$$\Box^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \lambda S_{\mu\nu} \qquad (16.5.1)$$

解法は，任意の電流によるベクトル・ポテンシャルの場合とまったく同じである．すべての量が $\exp(-i\omega t)$ のように変動すると仮定すると，ベクトル・ポテンシャルは

$$A_\mu(1) = \int dV_2 \frac{j_\mu(2)\cdot\exp(i\omega r_{12})}{4\pi r_{12}} \qquad (16.5.2)$$

となる．ここで添字1と2は，空間の位置の違いを表わす．(1) は，ポテンシャル A_μ を計算する位置，そして (2) は電流が存在する位置，そして r_{12} はその間の距離である．最も単純な放出は振動する双極子によるものであり，そのときの電流は狭い領域に制限されている．空間成分 $A_x\,A_y\,A_z$ を計算するのは比較的簡単である．時間成分つまりスカラー成分は通常は，A_μ に対する発散条件

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \longrightarrow i\omega A_t = \nabla\cdot\vec{A} \qquad (16.5.3)$$

から求めるのが最も容易である．この状況は重力でもまったく変わらない．場 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の時間部分も，空間部分を，

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi}\int dV_2\, S_{\mu\nu}(2)\frac{\exp(i\omega r_{12})}{r_{12}} \qquad (16.5.4)$$

によって計算してから発散条件を使って求めるのが最も容易である．

放射されるエネルギーなどの量を計算するには，図16.7に描かれているように，$S_{\mu\nu}(2)$ が重要な領域の大きさよりも位置 (1) がはるかに遠方にあるとする．(2) の近傍のある点を原点とし，距離 r_{12} を (2) でベキ展開すると，

$$\begin{aligned} r_{12} &= \sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta} = r_1\sqrt{1-(2r_2/r_1)\cos\theta+\cdots} \\ &\approx r_1 - r_2\cos\theta+\cdots \end{aligned} \qquad (16.5.5)$$

ただし $r_2 \ll r_1$ であり，また θ は r_2 と r_1 の角度である．(1) で観測され

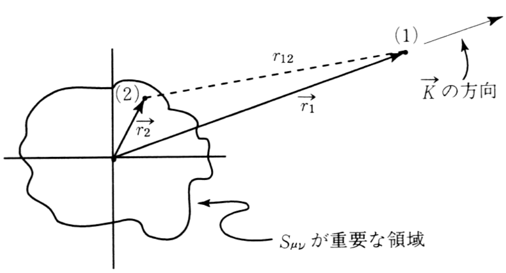


図16.7

る波は r_1 方向へ進んでいるので，$h_{\mu\nu}(1)$ は次のようになる．

$$\bar{h}_{\mu\nu}(1) = -\frac{\lambda}{4\pi r_1} e^{i\omega r_1} \int d^3 r_2 S_{\mu\nu}(2) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r_2}} \qquad (16.5.6)$$

式 (16.5.6) の積分は (1) の位置に依存しない．$S_{\mu\nu}(2)$ が球面波の発生源であることがわかる．

電磁気の場合，放出の最も単純なケースはしばしば，双極子近似に対応している．それは指数関数の展開によって得られる一連の積分項のうちの，ゼロでない最初の項である．重力では発生源はベクトルではなくテンソルなので，ゼロでない最初の項は，四重極的性質をもつ．$S_{\mu\nu}$ が重要な領域で $\vec{K}\cdot\vec{r_2}$ が 1 よりもずっと小さくなるような振動数に対しては，展開が正当化される．連星系や惑星系などの回転する質量ではすべて，運動の周期(たとえば地球・太陽系では 1 年)が，その系の大きさ程度の距離を重力波が伝播する時間(地球・太陽系では約 16 分)よりもはるかに長いので，展開の各項は非常に急速に小さくなる．したがって，天文学的に意味のあるほとんどすべてのケースでは，波長は系の大きさよりもはるかに長い．その結果，場 $h_{\mu\nu}$ は横応力の積分(全横応力)に比例する．

$$\bar{h}_{ab} = -\lambda \frac{e^{i\omega r}}{4\pi R} \mathcal{S}_{ab} \qquad \mathcal{S}_{ab} = \int d^3 r\, S_{ab}(\vec{r}) \text{ のとき} \quad (16.5.7)$$

波数ベクトルの方向の応力には意味がない．電磁気で有用であったすべての定性的な規則は，重力でもそのまま通用する．

このような重力波では，どれだけのエネルギーが放射されるだろうか．重力は謎めいており異質であるという懲りない偏見のため，多くの人がこの質問について無意味に悩んでいる．彼らは，重力はエネルギーをまったく運ばないかもしれないと考えている．しかし，重力がたとえば壁を熱くすることを具体的に示せるのだ．もうエネルギーについては悩む必要はない．状況は電磁気とまったく同じである．量子的解釈では，放射されたすべての重力子は，$\hbar\omega$ だけのエネルギーを運び去るのである．

■ このことを示すためにファインマンが考えた重力波アンテナについては，185 ページ以降を参照.

【付 録 A】

ファインマン講義の解説

ジョン・プレスキル
キップ・S・ソーン

この序文*1の残りの部分，そして(付録 B の)Brian Hatfield による「量子重力」の解説の部分では，ファインマンによる講義の要約，そしてそれが，重力に関するそれ以前の研究およびその後の発展とどのように関係しているかの説明を行なう．講義自体と同様，この要約もさまざまなレベルで読むことができる．理論物理学の高等教育を受けていない読者は飛ばすか拾い読みしたほうがよいかもしれない，この序文の特に技術的な部分は，小さい文字で記した．

アインシュタインの場の方程式の導出

この講義をしていた頃，ファインマンは重力の量子論の構築に力を入れていた．つまり相対性理論と量子力学の基本原則との統合である．ファインマンの一般相対論へのアプローチは，可能な限り直接的に重力の量子論に到達したいという願望によって形作られている．その目的のためには幾何学的な詳細は余計なことであり，特に，従来の幾何学的な重力へのアプローチは，重力と電気力学の類似性を見えにくくするものであると彼には思えた．

今では我々は，マクスウェルの古典論的電気力学を，光子が質量のないスピン 1 の粒子であるということから出発して構築することができる．電荷をもつ物質と相互作用する質量のないスピン 1 の粒子の量子論というものは，ローレンツ不変性とか確率の保存といった基本的原理によって厳しく制限される．自己無撞着な量子論，つまり量子電気力学は，古典論的極限ではマクスウェルの古典場の方程式に帰着する．

この類推に勇気づけられて，ファインマンは重力の量子論を，量子電気力学のような，「単なる場の量子論」とみなした．そして第 1 章から第 6 章で彼は，通常の平坦なミンコフスキー時空で，物質と相互作用する質量のないスピン 2 の量子(重力子)を記述する，意味のある場の量子論を構築できるかと尋ねる．そのような量子論の古典論的極

*1 (訳注)本書の「序文」の脚注＊2 でお断りしたように，この付録部分は原書の序文の続きである．

限は，アインシュタインの一般相対論の場の方程式に帰着しなければならない．つまりファインマンは，根本原理である量子論の形によって，古典論の形を立証しようとしたのである．ファインマンの議論には，幾何学的な発想は「裏口」からしか登場せず，主として，受け入れ可能な理論の構築を助ける道具として開発される．したがって，たとえば(一般相対論の通常の定式化では中心的役割を果たす)リーマンの曲率テンソルは，望ましい不変性をもつ重力の作用を表現するための単なる道具として導入される(6.4 節)．9.3 節までは，曲率が曲がった時空の接ベクトルの平行移動を使って解釈できることが明かにされない．

量子論の 1 つの重要な特徴は，質量のないスピン 2 の重力子には，2 種類のヘリシティしかないということである．したがって古典論的重力場も，力学的自由度は 2 つだけでなければならない．しかしスピン 2 の粒子に対応する古典場は，10 個の成分をもつ対称テンソル $h_{\mu\nu}$ である．実際，これらの成分のうち h_{00} と h_{0i} $(i=1,2,3)$ の 4 つは，力学的ではない拘束された変数であり，2 つの物理的なヘリシティ状態を表わすのに，6 つの力学成分 h_{ij} が残される．粒子の状態数と場の成分数の間のずれのため，重力の量子論も，そして対応する古典論も，強く拘束された理論となる．

この数の不一致が解決されるためには，理論には重複があり，多くの異なる古典場の配置が同一の物理的状態を表わしていなければならない．つまりゲージ理論でなければならない．質量のないスピン 2 の場の場合，必要なゲージ原理とは，アインシュタインの理論を導いた一般共変性であることを示すことができる．

第 3 章でファインマンは，保存するエネルギー運動量テンソルに一次で結合する，質量のないスピン 2 の場の 2 次の作用を作った．彼は 3.7 節で，その結果である線形の場の方程式のゲージ不変性について言及し，4.5 節では散乱振幅のゲージ不変性を要求することで，非線形の自己結合項を推定できると指摘した．しかし彼はこのプログラムを最後まで実行しなかった．(実行は難しいと述べている．) 彼はその代わりに，整合性ということに焦点を当てる別の方法を使ってアインシュタインの非線形の古典場の方程式を求める．質量のないスピン 2 の自由場の線形方程式は(不必要なヘリシティ状態を除去するために)ゲージ不変性をもたなければならないが，(スピン 2 の場が物質に結合するときに生じる修正など)一般的な修正を施すと，この場の方程式は解をもたなくなる．修正された方程式の新しい項は，自明でない整合条件を満たさなければならない．この条件とは本質的には，新しい項がゲージ対称性を満たすという要求である．この整合条件は，アインシュタインが求めた非線形結合の組合せ，およびそれに基づく非線形の場の方程式を求めるのに十分な条件である．

より詳しく説明すると，6.2 項で定式化されるように，問題は重力場の方程式

$$\frac{\delta F}{\delta h_{\mu\nu}} = T^{\mu\nu} \tag{A.1}$$

が物質の運動方程式と矛盾しないような，スピン 2 の場 $h_{\mu\nu}$ の作用 $F[h]$ を求めることである．ここで $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソルである．

ファインマンは第 3 章で，物質のエネルギー運動量テンソルが(特殊相対論の意味で)保存する，つまり $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ である限り無矛盾の線形の場の方程式が導かれるような，F の 2 次までの表式を見つけている．しかし問題は，いったん場 $h_{\mu\nu}$ が物質に結合すると(つまり物質が $h_{\mu\nu}$ の発生源として振る舞うと)，物質の運動方程式が重力によって修正され，$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ とはならなくなることである．したがって $h_{\mu\nu}$ の場の方程式と物質の運動方程式は矛盾しており，同時に両者を解くことができなくなる．これが(線形理論における)整合性の困難である．

$h_{\mu\nu}$ が満たす場の方程式が物質の運動方程式と無矛盾になることを要求すると，高次の非線形の補正を作用 F に加えなければならなくなるとファインマンは推定した．この整合性の要求は，作用が満たさなければならない不変原理という形に書くことができる．これがまさに，一般座標変換に対する不変性である．その後のファインマンの分析はいちおう伝統的なものであり，微分を 2 つまでしか含まない，最も一般的な首尾一貫した場の方程式は，(宇宙項付きの)アインシュタイン方程式であるとの結論にたどり着く．

得られた非線形の補正は，喜ばしい物理的な解釈が可能である．この補正がなければ，重力は自己相互作用をもたない．必要とされる非線形の補正を入れることで，重力場の発生源(平坦なミンコフスキー時空から見たときの)は，重力場自体の寄与を含む全エネルギー運動量テンソルになる．つまり，(強い)等価原理が満足される．物質のエネルギー運動量テンソルが満足する保存則は，アインシュタインの共変形のもの $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ になり，結局，物質と重力の間でエネルギーと運動量が交換することが可能となる．

第 2 章から第 6 章で説明されている計算を彼がすでに終えていたことを，我々はすでに 1957 年の Chapel Hill 会議 [DeWi 57] でのファインマンのコメントでわかっていた．Murray Gell-Mann は，ファインマンと彼が 1954-55 年のクリスマス休暇中に量子重力について議論したこと，そしてファインマンはその時にはすでに「かなりの前進」を果たしていたことを報告している [Gell 89]．

相互作用する質量のないスピン 2 の場の唯一の意味のある理論は，実質的に一般相対論のみである(つまり，低エネルギーの極限で一般相対論で近似できる)という主張は，今日しばしば利用される．(たとえば，超弦理論は相互作用するスピン 2 の粒子を含んでいるので，それは重力の理論であるはずだと結論づけられる．) 実際，そのような主張をしたのはファインマンが初めてではない．

自由な質量のないスピン 2 の場の方程式は，Fierz と Pauli によって 1939 年に書き下された [FiPa 39]．その後アインシュタインの重力理論を，平坦な空間でのスピン 2 の場の理論として扱うというアイデアは，時折，文献に登場した．しかし我々が知る限りでは，この枠組みでアインシュタインの理論での非線形結合を導く，公表されている最初の試みは，Suraj N. Gupta の 1954 年の論文 [Gupt 54] である．Gupta は，この理論の作用は，一般相対論が満たす，自明でない整合条件を満たさなければならないことを指摘した．しかし彼は，アインシュタインの場の方程式の唯一性を支持する詳しい議論は提示しなかった．

おおざっぱに言えば，Gupta の議論はつぎの通りである．質量のないスピン 2 の場 $h_{\mu\nu}$ の発生源がエネルギー運動量テンソルであり，そのテンソルにはそのスピン 2 の場自体の寄与も含むような理論を構築したいとしよう．

もしその発生源が，自由場の理論のエネルギー運動量テンソル ${}^2T^{\mu\nu}$(h について 2 次)だとすると，この発生源の $h_{\mu\nu}$ への結合は，ラグランジアンに 3 次の項を付け加えることになる．ラグランジアン中のこの 3 次の項から，エネルギー運動量テンソルの 3 次の項 ${}^3T^{\mu\nu}$ が導かれ，それが発生源に含まれる．するとこれが 4 次の項 ${}^4T^{\mu\nu}$ を生み出し，…というように続く．この繰り返しにより無限級数ができ，それを足し合わせると，完全な非線形のアインシュタインの方程式になる．Gupta はこの手続きを描いてみせたが，実際に最後までは計算しなかった．この議論の最初の完全な形は，1970 年に Deser が発表した [Dese 70]．Deser はまた，ヤン-ミルズ理論も同様な議論で導かれることも指摘した*2．

Gupta の仕事より数年前，その当時，まだ 18 歳で M. I. T. の大学生であった Robert Kraichman も，平坦な空間での質量のないスピン 2 の無矛盾の場の理論として一般相対論を導くという問題を研究した．彼はその結果を，未公表の 1946-47 年度の学士論文に記した [Krai 47]．Kraichman は 1949-50 年に，プリンストン高等研究所でこの研究を続ける．Bryce DeWitt から多少の励ましを受けたが，彼の研究を支持した同僚はほとんどいなかったと彼は言う．もちろんアインシュタイン自身もその一人であり，苦労して生み出した幾何学的洞察を否定するような重力へのアプローチに，ぞっとしていた．Kraichman が自分の研究結果を初めて発表したのは，最終的に満足できる導出方法を発見した 1955 年のことだった [Krai 55, Krai 56]．Gupta とは異なり，Kraichman は，重力が全エネルギー運動量テンソルに結合するとは仮定しなかった．むしろファインマンと同様に結論を場の方程式の整合性の結果として導いた．ファインマンは，Gupta の仕事も Kraichman の仕事も，まったく知らなかったようである．

ファインマンの分析は，最も一般的とは言えないと指摘しなければならない(Kraichman の仕事よりもかなり限定的である)．彼は，物質の作用について特定の形を仮定し(相対論的粒子の作用)，さらに，スピン 2 の場の物質への結合が厳密に 1 次であるとも仮定した(この仮定はより一般的な作用だったら成り立たなかっただろう)．特に，理論の物理的予言はすべて，スピン 2 の場 h の，局所的な非線形の変換をしても変わらないので，$h_{\mu\nu}$ を，$\tilde{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}+O(h(x)^2)$ と置き換えることもできる．ファインマンは物質への結合が h について線形であると要求することによって，場の再定義を行なう自由度を暗黙のうちに取り除いた．（場の再定義は，Boulware と Deser [BoDe 75] によって詳しく議論されている．）かなり後になって Wald [Wald 86] によってなされた，場の方程式の整合条件のより一般的な分析により，Kraichman とファインマンの結論と同様の結果が得られた．

重力相互作用の形を導くかなり異なるアプローチが，Weinberg [Wein 64a, Wein 64b] によって開発された．重力子-重力子散乱振幅の解析的性質についての非常に妥当な仮定から，Weinberg は，相互作用する質量のないスピン 2 の粒子の理論は，その粒子が物質(自分自身を含む)に普遍的な強さで結合している場合にのみ，つまり強い等価原理が満たされている場合にのみローレンツ不変であることを示した．ある意味で Weinberg の議論は，重力子がエネルギー運動量テンソルに結合するという性質が，別の，かなり一般的な原理から導かれるという意味で，他の人の主張よりも深く，そして強力である．いったん等価原理が確立すれば，アインシュタイン理論の構築

*2　[BoDe 75]，[Dese 87] も参照．

へと進むことができる([Wein 72] 参照).

最後に，ラグランジアンの中で，$h_{\mu\nu}$ の微分を3つ以上含む項はどうして排除されるかという問題がある．2つ以下の微分を含む項のみを考えることにより，最も「単純」な理論ができるという6.2節のコメント以外には，ファインマンはこの問題について，ほとんど何も言っていない.(やや異なる文脈での関連するコメントについては，10.3節を参照.）彼は，多くの微分を含む項は存在しなければならないが，時空の曲率が小さいときには理論の予言への影響は無視できるという，現代的な見解 [Wein 79] を予想していなかったようである．この見解の裏にある考え方は，アインシュタイン理論のラグランジアンは，より根本的理論，つまりプランク長さ $L_P=(G\hbar/c^3)^{1/2}\simeq 10^{-33}$ cm のオーダーの長さできいてくる新しい自由度(スーパーストリング？)を含む理論の，低エネルギー現象を記述する「有効ラグランジアン」に過ぎないというものである．有効ラグランジアンにおいては，微分の数とは関係なく，一般的原理と合致するすべての項が許される．しかし次元的な理由から，多くの微分を含む項の係数は，L_P について高次になる．したがって，典型的な曲率半径がオーダー L のプロセスでは，ラグランジアン中の4つの微分を含む項の効果は，2つの微分しか含まない項の効果と比較して，$(L_P/L)^2$ だけ小さくなる．これは通常のプロセスにおいては，極めて小さい数である．したがって，微分を2つ以下しか含まない項のみを使った簡単化された理論が実験を見事に説明する理由を容易に理解することができる．

一方，以上の論理によれば，(微分を含まない)「宇宙項」は L_P についてオーダー1の係数をもつことになる．実際には宇宙項は，この素朴な予想と比較して異常に小さく，重力理論における未解決の大きな謎として残っている [Wein 89].

幾何学

平坦な空間での質量のないスピン2の場の相互作用を記述する，意味のある理論を追求した後でファインマンは，その結果が幾何学的解釈をもつことに対して喜びを表明することを忘れていない(8.4節).「いずれにしろ現実には，スピン2の場はこの幾何学的意味をもっている．これは，簡単には説明できない驚くべきことである.」第8章から第10章での理論の展開では幾何学的用語が使われており，それまでの講義よりも，はるかに伝統的なアプローチを採用している．

9.3節でファインマンは，ビアンキ恒等式の幾何学的解釈は知らないと言っており，どうしたらわかるか，方針だけを説明している．彼がもくろんだ幾何学的解釈は，実際には，1928年のフランスの数学者 Elie Cartan の仕事の中に暗に含まれている [Cart 28]．しかし1962年の時点では，相対論の専門家も含めて物理学者には，そのことはほとんど知られていなかった．それは，ファインマンは使わない，微分形式という言語によって表現されていた．「境界の境界はゼロ」という Cartan の解釈は，1971年にやっと，Charles Misner と John Wheeler によって発掘され，その後広く知られるようになった．たとえば専門的レベルでは [MTW 73] の第15章，一般向けには

[Whee 90] の第7章を参照.

宇宙論

宇宙論についてのファインマンのアイデアのいくつかは，現在にも似たものがある．そのよい例が，物質の起源についての彼の態度である．定常宇宙論での物質の継続的生成論について，彼は本気で反対はしなかった(12.2節で，ビッグバン宇宙論はすべての物質が最初からあったと仮定する点に，同じ程度に難しい問題を抱えていると指摘する)．1.2節で，そして再度13.3節で，宇宙の全エネルギーはゼロであり，物質の静止質量は重力のポテンシャル・エネルギーにより相殺されるかもしれないと強調し，「宇宙の中心に粒子を新たに作ったとしても，……結局エネルギーは何も必要がないことになるというのだ」と述べる．これは，宇宙は「タダメシ」である，つまり無あるいは無に近いものがインフレーションという奇跡によって宇宙的サイズに膨れあがったという，現在人気のある見方に近い [Guth 81]．ファインマンはむしろ，宇宙がもし「無」から生じたとすれば，バリオン数が保存していないことになると悩んでいた.

ファインマンはまた13.1節で，宇宙の物質密度は臨界値に等しいと予想すると述べている．これは今日広く行き渡っている見解でもある [LiBr 90]．13.2節で彼は，密度が臨界値に近いという見解を支持する，興味深い(そして定性的に正しい)議論をしている．銀河団や超銀河団の存在は，「重力エネルギーが膨張の運動エネルギーと同程度の大きさなので，大部分の物質は集団になったと考えざるをえない．したがって，平均物質密度は至るところで，臨界密度にほぼ等しくなければならないと，私には思える」と，彼は指摘する．これは1962年には，かなり新鮮な主張であった.

ファインマンは60年代始めにすでに，宇宙の初期条件に関する処方を与えるための，物理の新しい原理の必要性を認識していたことは明らかである．この講義の最初の頃，2.1節で彼は脇道にそれ，統計力学の基礎についての話をし，熱力学第二法則は宇宙論的な起源をもっているはずであるという彼の信念を表明した．「問題は，過去における宇宙の状態が何か特別なものであったという考え方を，量子力学でいかに表わすかという点にある」という彼の発言に注目していただきたい．(同様の考察は，『ファインマン物理学』[Feyn 63a] および，同時期の『物理法則はいかにして発見されたか』[Feyn 67] にも登場する.）つまりファインマンは，20年ほど後に物理学者集団のある部分をとらえた，量子宇宙論の魅力を予測していたようにも見える．彼は1.4節および2.1節で，宇宙論的観点からの見たときのコペンハーゲン解釈の不適切さも強調している.

スーパースター

1962-63 年，ファインマンが重力の講義をしていた頃，カルテクは「強力な電波源」についての新発見で湧き立っていた．

天文学者たちは 30 年間，これらの最も強く電波を発生する天体の性質について，悩んでいた．1951 年 Walter Baade は，パロマ山にあるカルテクの新しい 200 インチの光学望遠鏡を使って，Cygnus A という最も明るい電波源が，(天文学者が予想していたように)我々の銀河系の星でなく，かなり遠方にある特異な銀河に付随したものであることを発見した [Baad 52]．2 年後，R. C. Jennison と M. K. Das Gupta [JeDG 53] は，イギリスの Jodrell Bank にある新しい電波干渉計を使って Cygnus A を観測し，電波の大部分は遠方の銀河の中心部からではなく，大きさがほぼ 20 万光年，距離がほぼ 20 万光年の，中心の両側にある一対の電波源から来ていることを発見した．カルテクの Owens Valley 電波干渉計は 1950 年代末に観測を開始し，ファインマンの重力の講義の年である 1962-63 年までにはパロマの 200 インチ望遠鏡での観測と共同で，他にもたくさんの双対電波源を発見した．いくつかは Cygnus A のように銀河であることがわかり，他のものは，星のような点状光源に対応していた(後者はカルテクの Maarten Schmidt が 1963 年 2 月 5 日に，赤方偏移が極めて大きいことを発見し [Schm 63]，後に Hong-Yee Chiu がクェーサーと名付けた)．1962 年および 63 年の始め，カルテクの天文学者たちがこれらの奇妙な天体の観測とそのスペクトラムの解釈について互いに競っていた一方で，天体物理学者たちはそのモデルの構築で競争をしていた*3.

1962 年の夏にケンブリッジの Fred Hoyle とカルテクの William Fowler [HoFo 63] が考案した一つの有望なモデルによれば，強い電波源のエネルギーは，銀河の中心にある巨大な星から生じているという．双対電波源の莫大なエネルギー(Geoffrey Burbidge の推定によれば 10^{58} から 10^{60} erg であり，太陽の質量エネルギーの 10^4 倍から 10^6 倍に相当する)を生み出すには，エネルギー源となる星は，太陽の 10^6 倍から 10^9 倍の質量をもっていなければならない．通常の星の質量の上限値である 100 太陽質量と比較すると，この Hoyle-Fowler 天体はまさに巨大な星であり，一部の人々はスーパースターと呼ぶようになった．

1963 年の始め頃(おそらく 2 月か 3 月)，Fred Hoyle はカルテクの Kellogg 放射線研究所の SINS セミナーで強い電波源に対するスーパースター・モデルについて話をした*4．質疑のときリチャード・ファインマンが，すべてのスーパースターは少なくとも回転していなけれ

*3　歴史についてのさらに詳しい説明は，たとえば [Thor 94] の第 9 章を参照.
*4　「星の内部および元素合成」，Fowler が組織していたセミナー.

ば一般相対論の効果により不安定となり，我々が現在ブラックホールと呼ぶものに崩壊すると，異議を唱えた．

Hoyle と Fowler は疑ったが，数か月以内に，彼ら，そして独立に Icko Iben [Iben 63]（Fowler の Kellogg 研究所の上級研究員）が，ファインマンはおそらく正しいと証明し，またシカゴ大学の S. Chandrasekhar [Chan 64] が独立に一般相対論的な不安定性を発見し，その決定的な解析を行った．

Hoyle と Fowler にとって，ファインマンのコメントは青天のヘキレキであり，ファインマンの驚くべき物理的直観以外に明らかな根拠はない主張に思われた．Fowler は非常に感銘を受け，そのセミナーとそのときのファインマンの洞察について世界中の多くの学者たちに語り，ファインマン伝説がまた一つ増えることになった．

実際にはファインマンの直観は，簡単に得られたものではなかった．他の場合と同様，これはかなりの部分，ファインマンの好奇心に導かれた詳細な計算に基づくものであった．そして他の場合とは異なりファインマンは，発見へ向けての戦いのある時点における細かなスナップショットを我々に残している．それがこの本の第 14 章である．

第 14 章をめぐる状況について，主として Icko Iben の 1963 年 1 月のノートと記憶から，そして 1971 年頃のファインマンと Thorne の会話，James Bardeen，Steven Frautchi，James Hartle，William Fowler からの情報をつなぎ合わせて説明しよう．

1962 年末または 1963 年 1 月始め，Hoyle-Fowler のスーパースターは，一般相対論の力によって大きな影響を受けるかもしれないという考えがファインマンの頭に浮かんだ．Iben のノートによれば，1 月 18 日より以前のある日，ファインマンが Kellogg 研究所の彼の部屋にやってきて，一般相対論がスーパースターにいかに影響するかという問題を取り上げ，ファインマンが自分で第一原理から導いた，スーパースターの構造を支配する一般的な相対論的方程式を Iben に示し，Iben のような天体物理学者が，対応するニュートン的方程式から，星のニュートン的モデルをどのように構築するのか尋ねた．議論の後ファインマンは部屋を出ていったが，数日後，1 月 21-25 日の週のある日戻ってきた．「ファインマンは部屋に入り，すでに方程式を解いたと言って私を驚かせた．彼は，あるコンピューター会社に相談をし，その時代のワークステーションともいうべきものを使ってリアルタイムで方程式を解いたと私に説明した」と，Iben は語る．

1 月 28 日月曜日，彼の得た数値解について数日間考えただけで（おそらく別のことにも多くの時間を使わねばならなかっただろう．同じ月曜日の大学生向け講義の準備もしなければならなかったのだから），ファインマンはこの本の第 14 章の講義を行なった．（これは，Maarten Schmidt によるクェーサーの赤方偏移の発見の 8 日前であった．）

第 14 章の講義は，スーパースターがいかに振る舞うかを理解する

ためのファインマンの奮闘中になされた．それは，一般相対論によりそれが不安定になることに彼が「気づく前」のことであった．その結果，第 14 章の解釈の部分(14.3 節と 14.4 節)はかなり間違っている．しかしその誤りは，問題解決に向けてのファインマンの直観的アプローチを示す，興味深い誤りである．

ファインマンは，Morinigo と Wagner による第 14 章の講義ノートを再検討することはなかった．1971 年，第 12 章から第 16 章までの頒布を許可したとき，彼はおそらく，第 14 章の解釈の部分は，まだ結論の出ていない考察に関する中間報告であったことを忘れていたようである．

ファインマンは第 14 章を，次のように始めている．「非常に単純ではあるが，現実の属性をたくさん備えているモデルを考える．この，単純な問題への解答を理解したうえで，モデルの精密化について考えることにしよう．」(精密化，つまり電子-陽電子対の影響，ニュートリノ放出，原子核反応，回転，不安定性などが，その後 1963-64 年に，ファインマンから多くの助言や情報を得て，Iben [Iben 63]，Curtis Michael [Mich 63]， Fowler [Fowl 64] および Bardeen [Bard 65] によってなされた.）

ファインマンの目標は相対論の効果を理解することだったので，ニュートン力学的であった Fowler-Hoyle のモデルとは異なり，彼のモデルは完全に一般相対論的なものである．一方，Fowler と Hoyle は星の圧力 p と内部エネルギー密度 ϵ に対して物質(ガス)と電磁波(radiation)双方の影響を考えたが，ファインマンは p_{gas} と ϵ_{gas} を無視して単純化した．ファインマンの主な関心は質量 $M=10^9 M_{\text{太陽}}$ のスーパースターであり，ニュートン極限においてスーパースターでは電磁波が圧倒的になる，つまり

$$\beta \equiv \frac{p_{\mathrm{gas}}}{p_{\mathrm{radiation}}} = \frac{2\epsilon_{\mathrm{gas}}}{\epsilon_{\mathrm{radiation}}} = 8.6\left(\frac{M_{\text{太陽}}}{M}\right)^{1/2} \simeq 3\times10^{-4}\left(\frac{10^9 M_{\text{太陽}}}{M}\right)^{1/2} \quad \text{(A. 2)}$$

ということを Hoyle と Fowler はすでに示していたので，この単純化は妥当だと思える．(ここでは話を簡単にするために，ガスは純粋の水素だとした.）これらの星は対流が活発なので，核子当たりのエントロピーは半径によらず，8×(ボルツマン定数)/(核子当たりのエントロピー）に等しい β も半径によらない．ファインマンが気づいたように，これは完全に相対論的な場合でも変わらず，式 (A. 2) にも 1 のオーダーの因子が掛かるだけである．

ファインマンは 14.1 節と 14.2 節で p_{gas} と ϵ_{gas} を無視し，スーパースターの構造の一般的な相対論的方程式を作り，それを数値的に積分し，表 14.1 に結果を示した．この表の記号の定義は，式 (14.2.1) と，パラメーター τ の定義

$$\tau = \frac{4/3}{\text{核子当たりのエントロピー}} = \left(\frac{\text{核子の静止質量}}{\text{ボルツマン定数}}\right)\frac{\beta}{6} \simeq 1800\beta \quad \text{(A. 3)}$$

を使えばわかる．ファインマンは，核子の質量と 10^9 K を 1 とする単位を使っている．

ファインマンのモデル，および彼によるその解釈(誤解)を議論するには，

図 A. 1 が有用だろう．この図はファインマンが構築したスーパースターのモデル(太い線)と，その超相対論的領域への拡張(上部の細い線)，および準ニュートン的領域への拡張(下部の細い線)を示している．これらの拡張は後に，Iben [Iben 63]，Fowler [Fowl 64]，Bardeen [Bard 65] および Tooper [Toop 66] によって計算された．縦軸は星の重力束縛エネルギーの符号を変えたもの，横軸は星の半径である．ファインマンは調べなかった準ニュートン的領域(束縛エネルギーの，陰の付いた領域の部分)では，p_{gas} と ϵ_{gas} は無視できず，束縛エネルギーは(Fowler が「青天のヘキレキ」に対する答として示したように)

$$\frac{M-M_{\text{静止}}}{M_{\text{静止}}} \simeq -\frac{3\beta}{8}\left(\frac{2M}{R}\right)+1.3\left(\frac{2M}{R}\right)^2 \qquad \text{(A. 4)}$$

と，ガスの効果(第 1 項)と一般相対論の効果(第 2 項)の微妙なバランスで決まる．この式で $2M$ は，スーパースターと同じ質量 M をもつブラックホールのシュワルツシルト半径である．

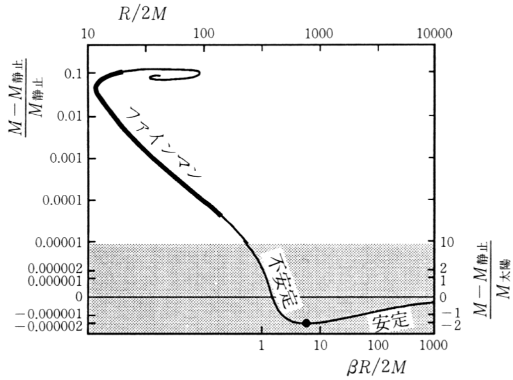


図 A. 1　水素から構成されるスーパースターの束縛エネルギー．左の縦軸に記されているのは，星の束縛エネルギーの割合，$(M-M_{\text{静止}})/M_{\text{静止}}$．ただし M は星の全質量，$M_{\text{静止}}$ はその全核子の静止質量．上の横軸に記されているのは，同じ質量をもつブラックホールのシュワルツシルト半径 $2M$ を単位とした星の半径．左と上のスケールは，白い領域では任意の質量のスーパースターに対して正しく，(準ニュートン的な)陰の付いた領域では，$M=10^6M_{\text{太陽}}$ の場合にのみ正しい．また右の縦軸は，太陽の質量 $M_{\text{太陽}}$ を単位とした星の束縛エネルギー．下の横軸は，$R/2M$ に，ガスの圧力の全圧力に対する比 β を掛けたもの．右と下のスケールは，準ニュートン的な陰の付いた領域では任意のスーパースターに対して正しいが，完全に相対論的領域では正しくない．縦軸のスケールはアークタンジェントである．つまり，$|(M-M_{\text{静止}})/M_{\text{太陽}}|\lesssim 1$ のときは線形，$|(M-M_{\text{静止}})/M_{\text{太陽}}|\gtrsim 1$ のときは対数的になる．曲線の太い部分は第 14 章のファインマンの計算から，また細い部分は Fowler [Fowl 64]，Iben [Iben 63]，Bardeen [Bard 65] そして Tooper [Toop 66] による．

自分のモデルの解釈において(14. 3 節)ファインマンは，一定数の核子を含み(つまり，全核子の静止質量 $M_{\text{静止}}$ を固定)，そして次第に熱エネルギーを放出してその全質量を減らし，その結果より強く束縛されるというスーパースターの進化について考えることから始める．彼は奇妙な進化を発見する．星が熱エネルギーを放出するとその半径は増大し(図 A. 1 の曲線の右下がり

の動き)，その中央の温度は下がる．これは，燃料を消費していないとすれば，エネルギーを放出すると縮んで熱くなるという大部分の星の振る舞いとは逆である．(束縛エネルギーの曲線を左にたどって完全に相対論的な領域に行くのではなく，ガスの効果を残したまま右の準ニュートン的領域に進んだとすれば，彼は逆の振る舞いを見つけていただろう．スーパースターはエネルギーを放出すると，縮みそして熱くなる．)

そしてファインマンは，自分のスーパースターのモデルの安定性を考える．「この星の安定性は(定量的には)まだ調べられていない」と彼は強調した上で，この問題についての自分の第一印象を説明する．

「ある一定の核子数と τ (一定のエントロピー)を与えるケースでの，半径と中心温度の関係を比較してみよう．……半径の最小値がありそうだ(図 A. 1 の左端の曲がり)という事実は，非常に示唆的である．この星には安定な状態があるかもしれない」．ファインマンが探っていた安定性の解析方法は，約 1 年後に，大学院でファインマンを指導教官としていた James Bardeen が完成した．Bardeen によるこの議論の完成版 [Bard 65，BTM 66] によれば，$M_{静止}$ が一定の星という制限の下で束縛エネルギーの曲線上を動くと一般にはエントロピーは変化するが，束縛エネルギーの最小値または最大値の近傍ではエントロピーの値は安定する．すると星は各最小点または最大点で，振動数ゼロの変形モードをもつことになる．一つの平衡状態から，同じエントロピー，同じ束縛エネルギー，そして同じ静止質量をもつ別の平衡状態に移るモードである．このことは，動径方向の振動のモードが 1 つ，束縛エネルギーの各極値で安定性を変えることを意味する．そのモードの固有関数が取らなければならない形を調べることによって Bardeen は，もし極値を通るときに束縛エネルギー曲線が時計回りに回るとすればそのモードは不安定になり，反時計回りならばモードは安定であると推論した．(この表現は，曲線をどちらの方向にたどった場合でも成り立つ．) Bardeen の分析を図 A. 1 に適用すると，右下の準ニュートン的領域(エネルギーを放出すると収縮)は安定であり，束縛エネルギー曲線の最小値に達すると安定性を失い崩壊してブラックホールを形成することがわかる．最小値を越えた領域(ファインマンが調べた領域を含む)には，動径方向の脈動に不安定モードが 1 つあり，束縛エネルギー曲線の最初のピークを越えた領域(図 A. 1 の左上の部分)には，2 つの不安定モードがある．

もちろんファインマンは 1963 年 1 月 28 日にはこのことに気づいていなかった．そこで第 14 章の講義では彼は，自分のモデルの安定性に別の方法で迫ろうとした．彼は，核子の静止質量が $M_{静止}$ であるスーパースターを考え，核子当たりのエントロピーを一定にしたまま，それを質量 $M_{静止}$ をもつ 2 つの星に分割することを考えた．「分割により仕事が得られるだろうか，あるいは分割するには仕事が必要だろうか．」彼の表 14. 1 および式 (14. 2. 1) から，彼は，「2 つの天体は，その 2 つまとめたものよりも重い．このシステムを分割するには仕事がいるのだ．星は物質を放出せず，一つの固まりとしてまとまっていることが示唆される」，つまりスーパースターは安定であると考えた．

一見するとこの議論には説得力があるように思えるが，実際にはそうではない．(ファインマンもこの講義と Hoyle のセミナーとの間に，そのことに気づいたようである．) ファインマンが最初の星を壊して作った新しい 2 つの星は，図 A. 1 の太い線の上のほうにある．つまりそれは最初の星よりも

相対論的である．しかし，図 A. 1 の右下のほうには，曲線の準ニュートン的な安定な領域に，静止質量が同じで，核子当たりのエントロピーも同じ星がある．もし最初の星がこれらの星 2 つに分かれたとすればエネルギーが放出されるので，最初の星が不安定であることがわかる．1963 年 1 月 28 日にはファインマンも，また他の誰も，陰の付いた領域での曲線の形を知らなかったので，彼はこの点を見逃した．しかし，彼はさらにこの問題を考えて，Hoyle のセミナーまでにこの間違いに気づいたのだと推定するのが自然である．

ファインマンは安定性について議論の後の 14. 4 節で，スーパースターについての今後の研究の方向を提案している．彼はまず，完全に相対論的な，エントロピー一定のスーパースターの平衡モデルを構築する変分原理を提案する．「核子数一定(そして 1 核子当たりのエントロピーも一定)として，質量最小の配置を決定，……」．2 年後，パリで研究をしていた John Cocke [Cock 65] が，おそらくファインマンの提案のことは知らずに，ファインマンの考えと同等な詳細な変分原理(質量と核子数を一定にしてエントロピーを最大にする)を開発し，それを使って相対論的な星のモデルを構築した．

ファインマンは 14. 4 節で，「静的な解を研究した後は，完全に動的な問題に移ることもできる．微分方程式は恐ろしく複雑なものになる」と続ける．実際ファインマンは，自分でいくつかの方程式を調べた．それらは後に，ソ連の Mikhail Podurets [Podu 64]，およびアメリカの Michael May と Richard White [MaWh 66] によって独立に導かれ，熱核爆弾の設計のために開発されたコンピューター・コードに由来するプログラムを使って数値的に解かれた．結果はよく知られている．ファインマン／チャンドラセカールの相対論的不安定性をもった星は，爆縮してブラックホールになる．

ファインマンの第 14 章の講義から約 10 年間，高速回転しているスーパースターが，クエーサーや強い電波源の動力源のモデルの強力な候補者であった．しかし 1970 年代，次第に，高速回転している超大型のブラックホールに基づくモデルが優勢になってきた．今日ではスーパースターは一般に魅力的ではあるが，銀河中心核の超大型ブラックホール形成に向けての過渡的な天体であるとみなされている．文献 [Thor 94] を参照．

ブラックホール

ブラックホールという概念は 1960 年代の初期に登場し始めており，ファインマンの見解はややその流れに遅れていたかもしれない．この本の中で最も時代遅れとなってしまった講義は，おそらくシュワルツシルト解とその意味について論じた第 11 章と第 15 章だろう．

ある意味で，我々がブラックホールと呼ぶものは，すでに 1916 年に，Karl Schwarzschild がアインシュタイン方程式の解を発見したときからわかっていた [Schw 16]．しかし数十年，大部分の物理学

者は，シュワルツシルト解がもつ深刻な意味に，頑固に抵抗してきた.(これには，1939 年にブラックホールは存在できないと主張する論文を書いたアインシュタイン自身も含まれる.) Oppenheimer と Snyder による重力崩壊についての美しい完全な解析も，不思議なことに長い間ほとんど影響を与えなかった. Oppenheimer と Snyder は，一様な密度をもつ球対称な，圧力のない「星」の崩壊を調べ，外部の静止している観測者から見たこの星の爆縮は，星の表面がシュワルツシルト半径に近づくと減速し，最終的には止まってしまうことを示した. また彼らは，崩壊する星に向かって落ちていく観測者は，決してこのような爆縮の凍結を観測しないことも，明快に説明した. このような観測者は有限の固有時間で臨界半径を越えて内側に入り，その後は光の信号を外部の観測者に送ることはできない. 異なる座標系での説明がこのように極端に異なるということは，きわめて理解しがたいことである. この 2 つの説明は，David Finkelstein [Fink 58] が 1958 年，臨界半径を越えて落下する粒子の世界線と，臨界半径で静止する外向きの光子の世界線を同時に描くことが容易な座標系を使ってシュワルツシルト解を分析したときに初めて，調和が取れるようになった. この分析は，シュワルツシルト時空の異常な「因果構造」を明らかにした.「地平線」の内側にある何物も，どんどん小さくなる球面に引きつけられざるをえない. この描像は，いったん星がその臨界半径よりも小さくなると，収縮による時空の特異点の出現は避けられないことを(ある人々に)示唆した. これが実際に，球対称であるとか圧力がないといった理想化とは無関係に正しいことは，1964 年に Roger Penrose によって証明される [Penr 65].

したがって，重力に関するファインマンの講義のタイミングは不幸であった. ブラックホール研究の「黄金時代」が始まろうとしており，その後 10 年の間に，多くの目覚ましい洞察が登場した. 1962-63 年には予想できなかったこれらの洞察の結果，一般相対論の研究は完全に形を変え，相対論的天体物理学という新しい分野が到来する.

1962-63 年時点でのシュワルツシルト解に対するファインマンの見解は，John Wheeler に大きく影響されている. Wheeler は何年も，Oppenheimer と Snyder の結論は信頼できないと感じていた. 物理的に考えて合理的でないと考えたのである. 1958 年になっても，もし重力崩壊において，より現実的な状態方程式が使われたならば，定性的に異なる結果が得られるだろうと主張していた [HWWh 58]. (ブラックホールの因果構造が適切に理解されていたら，このような見解は支持されなかっただろう.) しかし Wheeler は次第に，Oppenheimer-Snyder の結論に従って重力崩壊の必然性を受け入れるようになった.(この見解の移行は，Finkelstein とは独立にブラックホールの因果構造を解明した Martin Kruskal の洞察によって促進された [Krus 60]. 実際，Kruskal の有名な論文は，大部分が Wheeler によって書かれたものである. その洞察と計算は Kruskal

によるものだが.）しかしまだ懐疑的であった時期には，Wheeler はその特有の仕方で反応した．発表した論文の中で Oppenheimer-Snyder の論文を引用したことはほとんどなかった．ファインマンが 11.6 節の中で，物質の崩壊の研究は興味深いと指摘したことは示唆的である．Oppenheimer と Snyder が物質の崩壊について 23 年前に詳しく研究していたことを，彼は気づいていなかったようである．15.1 節の中で，第 14 章の(誤った)考察に基づき，「現実の物質」から構成される星はその臨界半径の中に崩壊することはできないと推測している．

ファインマンは，Wheeler が 50 年代中頃から推進してきた，そして 1962 年の時点でもまだ(それほど熱心ではないにしても)唱導していた「幾何力学」に，何回か言及している [Whee 62]．Wheeler やその共同研究者たちは，素粒子を，物質のない重力方程式の古典解(の量子版)として生じる幾何学的実体であると解釈しようとしていた．Wheeler は特に，「電荷なしの電荷」という概念にひかれていた．そして，もし電気力線が空間の自明でない「ワームホール」のトポロジーにトラップされたとすれば，ワームホールのくびれは，くびれの微小な大きさを検出できる能力をもたない観測者には，点状の荷電粒子のように見えるだろうと指摘した [MiWh 57]．シュワルツシルト解の時空には，2 つの漸近的に平坦な領域が狭いくびれによってつながる部分を表わす空間が含まれており，彼が描いたワームホールのモデルになると，Wheeler は強調していた．

ファインマンは明らかに，ワームホールという概念に魅せられていた．彼はまず 11.5 節で，そして 15.1 節と 15.3 節でも再び，このアイデアについて語っている．ファインマンは，重力半径の内側に入った星を「ワームホール」と呼んでいる．「ブラックホール」という用語が(Wheeler によって)発明されたのは 1967 年のことである．現在我々がブラックホールの地平線と呼んでいるものに対しては，ファインマンは「シュワルツシルトの特異性」という古い用語を使っている．これは実際の特異性，つまりブラックホールの中心にある時空の曲率が無限大になる領域と混同する恐れがあるので，特に残念な用法である．ファインマンは，この真の特異性には言及していない．

1962 年までには，シュワルツシルト解の因果構造はかなりよく理解されていた．これはファインマンが引用し 15.1 節の題材となった，Fuller と Wheeler の論文 [FuWh 62] に，よく説明されている．（ファインマンの講義で引用された，極めてわずかな論文のうちの 1 つであるこの論文は，完全に解析的に延長されたシュワルツシルト時空を表わす Kruskal 座標を使って時間的および光的な測地線の性質を簡潔に表現する「Kruskal 図」を提示している.）ファインマンは主な結論を引用する．つまり，ワームホールのくびれは実際には動的であり，粒子がそれを越える前につぶれてしまうので，シュワルツシルト解は Wheeler が興味をもったタイプのワームホールではない．しか

し Fuller-Wheeler の論文は，重力崩壊の問題に対するこの因果構造のより広い意味にはまったく触れておらず，ファインマンがその意味を認識していた形跡はない．

また，15.2 節と 15.3 節のファインマンのコメントから，1960 年に Graves と Brill が明らかにした [GrBr 60]，(Reissner-Nordstrom の)電荷をもったブラックホール解の因果構造を，彼が理解していなかったことがわかる．「…粒子が跳ね返ってくる時刻が粒子が落ち込むよりも早いということだって，あるかもしれない」というコメントを参照．実際，解析的に延長された時空では，測地線はブラックホールから跳ね返ってくるのではなく，有限な固有時間で「別の宇宙」に入っていく(たとえば [HaEl 73] 参照)．しかし，この解の内部は一般的な摂動に対して不安定であることが知られている [ChHa 82]．重力崩壊で形成される，電荷をもつ現実のブラックホールでは状況は定性的に異なり，まだよくわかっていない．しかし，ブラックホールのコアが非常に特異なので，少なくとも古典的な一般相対論の範囲では，何物も「別の宇宙」に行くことはできない可能性が強い [BBIP 91]．

重 力 波

1957 年になっても，Chapel Hill 会議で，アインシュタイン理論が実際に重力波放射の存在を予言するのかどうかについて，真剣な論争があった [DeWi 57]．混乱は特に，重力波によって放出されるエネルギーを厳密に定義するという問題が，かなり微妙であることによって生じた．重力のエネルギーが，局所的に観測可能な密度の積分として表わせないという点に困難があった．

Chapel Hill 会議でファインマンは，この問題を実践的に考え，重力波によって「運ばれる」エネルギーを吸収するような重力波アンテナを，原理的に考えてどのように設計するかを説明した [DeWi 57, Feyn 57]．第 16 章で明らかにこの装置の変種の説明に向かっている所で，ノートは突然終わっている．「したがって，重力が壁を熱くできることを具体的に説明し，エネルギーについては悩む必要はないことを示そう」．ファインマンのアンテナの変種は Chapel Hill 会議のすぐ後で Bondi により発表された [Bond 57](皮肉なことに，Bondi はかつて重力波の実在について懐疑的だった)が，ファインマンはそれについて，何も発表していない．この仕事について残っている最善の説明は，1961 年 2 月に完成した Victor Weisskopf に宛てた手紙の中にある [Feyn 61]．この手紙は第 16 章の内容の一部を含んでいるが，さらに少し先に進んでおり，放出されるエネルギーの四重極近似での公式を導いている(Chapel Hill 会議でも引用された結果)．そしてこの手紙は，ファインマンの重力波検知器を説明している．この装置は単に，堅い棒と，そこに差し込まれた自由に滑る(ただし摩擦が

少しある）2個のビーズである．重力波が棒を通り過ぎると，原子の力により棒の長さは固定されたままだが，2つのビーズ間の固有距離は振動する．したがってビーズは棒をこすり，熱が発生する．（ファインマンはこの Victor Weisskopf への手紙を，講義を聴いていた学生に配布する資料の中に含めた．）

Chapel Hill 会議の参加者の一部にとっては議論の対象となるものだったかもしれないが，重力波についてのファインマンの結論は新しいものではなかった．実際，1931年にロシア語版が完成し1951年に英語版が登場した Landau と Lifshitz の有名な教科書 [LaLi 51] には，数節が重力波の理論に当てられている．彼らの説明はいつも簡潔だが，明快で正しい．Weisskopf への手紙の中でファインマンは1957年の会議のことを思い出し，コメントしている．「会議の1日全体がこの問題に費やされたのにも，そして「専門家」が混乱しているのにも驚いた．混乱が，「重力波が仕事をするか」ではなく，保存するエネルギー・テンソルを探すなどという問題から生じているのだ．」

実際，John Wheeler への深い尊敬にもかかわらず，彼は50年代末，そして60年代始めの相対論研究者たちの多くに対する軽蔑を隠せなかった．このことはおそらく，1962年のワルシャワ会議から妻 Gweneth へ宛てた手紙に，最も率直に表現されている [Feyn 88].

> この会議で得るものは何もありません．私は何も学んでいません．実験がないので，この分野は活発ではないのです．それに最高の人々はほとんど，この分野で仕事をしていません．その結果，興奮剤ばかりが出回ることになり，私の血圧にはよくありません．ばかげた発言があり，それが真剣に議論され，昼食中にも誰かが私に質問をしたり自分の「仕事」について話し始め，議論に巻き込まれてしまいます．そしてその「仕事」と言えば，(1) まったく理解不可能，(2) 曖昧で不明確，(3) 正しくて当たり前のことなのに，長くて困難な方法を使って導かれ，あたかも重要な発見のように主張されている，(4) すでに確かめられ何年も前から受け入れられている自明で正しい事実が実際は間違いであるとの，発言者の愚かさに基づく主張（これが最悪です．愚者を納得させることはできません．），(5) おそらく不可能で，明らかに意味のないことをしようとする，結局は失敗する試み，さもなくば，(6) 単なる間違いなのです．現在，この分野には多くの「活動」がありますが，その「活動」の実態は，以前の誰かの「活動」が間違いであるか，無益であるか，望みがあるかを示すことなのです．多くの虫が，ビンから抜け出そうとして絡み合ってうごめいているようなものです．問題が難しいのではありません．いい人々は別の所で仕事をしているのです．もう私が二度と重力の会議に行こうとはしないように，気を付けていてください．

このような極端な評価は，1962年でも完全には正当化されないだろうし，この手紙がファインマンの本当の気持ちを100パーセント正

確に表わしているとも思えない．Chapel Hill の会議にもワルシャワの会議にも出席した Bryce DeWitt は，次のようなコメントを出している［DeWi 94］．

> ワルシャワの会議に対するファインマンの反応には，私も確かに同感できる．私も同じような気持ちを抱いた．(彼が，Ivanenko に聞いたこともないほど痛烈な攻撃をして，フラストレーションをぶちまけている様子が，まだ目に浮かぶ.) しかし全体像を示さないで彼の個人的な手紙を公表するというのは，歴史的な真実を汚すことになる．彼は(私と同様に)，Chapel Hill 会議でのいくつかの議論をナンセンスであると感じたが，そこではまずまずの時間を過ごしたはずだと私は思う．彼の経路積分を曲がった空間に適用すると，スカラー曲率項を含むシュレーディンガー方程式が導かれると私が示したとき，彼が非常に興味をもったことを覚えている．その会議の出席者たち(Bondi，Hoyle，Sciama，Møller, Rosenfeld, Wheeler いった人々)は愚かではないし，彼と理知的に話をしていた．(会議の出席者は私が選んだ．これは出席者を限定した会議だった.) 彼がワルシャワへの招待を喜んで受け入れたのは(この会議は開放されていた)，Chapel Hill での経験と無関係ではなかっただろう．ワルシャワでも，彼と私は正規の時間以外にも議論をした．その議論を彼が本気で，あの手紙の中の 6 グループのどれかに入れたとは，考えないようにしている．

1962 年におけるファインマンのコメントが適切だったかどうかは別として，現実の状況はすぐに変わった．ブラックホール研究の「黄金時代」が始まろうとしていたからである．

哲　学

この一連の講義の目立った特徴の一つは，ファインマンがしばしば，哲学的問題に引き付けられたことである．(彼はしばしば科学哲学者，そして「フィロソフィカル(哲学的)」という言葉を軽蔑し，よくふざけて，「フィロ〈ゾー〉フィカル」と発音していた．しかし彼の哲学的洞察は，少なくとも物理学者たちには敬意を払われていた.) たとえば彼は 1.4 節で，量子力学は実際にマクロな物体にも適用する必要があるのかという問題を検討している．(そこで彼が概説した，重力の量子化は本当に必要であるとの主張を裏付ける論理は，彼が 1957 年の Chapel Hill 会議で提起し多くの議論を引き起こしたものである.) もう一つの例は，マッハ原理への彼のこだわりである．物体の慣性は，遠方の物体とその物体との相互作用から生じるというマッハのアイデアは，ファインマンが大学院生だった頃に彼と Wheeler が提案した，加速する電荷へ働く放射の反作用は，局所的な電磁場ではなく遠方の電荷との相互作用によって生じるという電気力学の解釈と［WhFe 45,

WhFe 49]，漠然とした類似性がある．したがって 5.3 節と 5.4 節でファインマンがマッハの見解に共感を示しているのは，自然なことである．彼は 5.4 節でマッハ原理の量子力学的定式化を探求し，13.4 節では宇宙論的な文脈で，その話に戻っている．9.4 節と 15.3 節での，物質がない曲率という考え方に積極的ではない態度も，マッハ的である．

哲学的考察は，多くの余談の中に登場する．8.3 節ではファインマンは，空間が「真に」平坦である，あるいは曲がっているという表現の意味を検討する．7.1 節では，なぜニュートンの第二法則が単なるトートロジー(つまり，「力」というものの定義)ではないのかを説明する．また厳密ということに対して，10.1 節(「問題なのは事実であって，証明ではない」)や 13.3 節(「物理の結論が間違っている，あるいは矛盾していることを数学で示す方法はない」)で皮肉を飛ばす．また 13.4 節では，単純さということが，自然の真理の探求における指導原理になるべきだという観念に疑問を投げ掛けている．「…しかし最も単純な解とは，宇宙には何もないという「無」の解である．自然ははるかに複雑なものであり，常に単純でなければならないという主張にくみすることはできない．」

ファインマンが 2.3 節と 2.4 節で，重力はニュートリノ交換によるという，展望のないアイデアを頑固に追求するのも，啓発的だ．これは，実験で発見された新しい現象に科学者がどのように対処すべきかということについての，ファインマンの考えの実例である．科学者は新しい法則の推測に浸る前に，知られている原理による説明を注意深く探さなければならない．しかし同時にファインマンは，受け入れられているアイデアに対して疑問をもち続け，また，風変わりに見えるアイデアにも偏見をもたないことの重要性を何度も強調する．量子力学は誤りかもしれないし(1.4 節と 2.1 節)，宇宙は大きく見ると一様ではないかもしれず(12.2 節と 13.2 節)，定常宇宙論は正しいかもしれず(13.3 節)，ワームホールに関する Wheeler の直感は正しいかもしれない(15.3 節)，等々．

1 ループの量子重力

ファインマンの量子重力の研究は結局，画期的な発見に結び付いた(しかしそのことは，16.2 節の短いコメントを除いては，この本には書かれていない)．その発見とは，摂動論の 1 ループ・レベルでユニタリティを維持するには，共変的に量子化された理論に「ゴースト」場を導入しなければならないというものである．この発見の時期は，かなり正確に確定することができる．ファインマンはその結果を，1962 年 7 月のワルシャワ会議での講演で報告し [Feyn 63b]，1 ループ・レベルでのユニタリティの問題は，「私がここに来る 1 週間前に初めて完全に解決した」と述べた．つまり，この本の講義の前に，研究は終わっていた．

ファインマンは単純な共変的ファインマン則を使って 1 ループ振幅を計算

し，重力子の物理的でない偏極成分の寄与が完全には相殺せず，ユニタリティが破れることを発見した．しばらくの間，彼はこの謎を解決することができなかった．そしてMurray Gell-Mannがファインマンに，より単純な，質量のないヤン-ミルズ理論を調べたらどうかと示唆した．(Gell-Mannによれば，この示唆をしたのは1960年だった[Gell 89])．ファインマンは，ヤン-ミルズ理論の1ループで問題を解き，同様の方法が重力にも使えることを発見した．ワルシャワでの講演で彼は，1ループ・レベルではユニタリティの問題を解決したが，行き詰まっていると報告している．この方法を2ループ以上に一般化する方法がわからなかったのだ．しかし，「皆さん，まだ1週間しか経っていないのです」と弁明した．しかし彼がこの問題を解くことはなかった．

ワルシャワでのファインマンの講演後の質疑の時間に，興味深いやり取りがあった[Feyn 63b]．Bryce DeWittがファインマンに，ユニタリティが1ループ・レベルでどのように達成されるのか，詳しい説明をするように迫ったのだが，ファインマンは応じなかった．しかしDeWittはしつこく，ファインマンも最後には気を変え，「私にも，誰にも理解できない式を書くことができることを示しましょう」と言ってかなり長い説明をした．この話が興味深いのは，結局，ヤン-ミルズ理論と重力理論の共変的量子化を任意のオーダーに一般化する方法を発見したのが，DeWitt [DeWi 67a，DeWi 67b]（そして彼とは独立にFaddeevとPopov [FaPo 67]）だったからである．ファインマン自身の経路積分の技術が一般化には不可欠であり，またDeWittやFaddeevとPopovによる完全な結果は明らかに，ファインマンの1ループ・レベルでの解決策に刺激されているということにも，注意すべきだろう．

このファインマンの重力講義の終わり部分(この本に掲載されていない部分)は，量子重力とヤン-ミルズ理論のループ補正に関するものであった．彼は，ワルシャワで報告した1ループの結果，そしてより高次にその結果を拡張する試みについて説明した．多くの人の話によれば，これらの講義は複雑で理解が困難であり，いらいらした感情が見え隠れしていたそうである．満足できる摂動展開の定式化を見つけられなかったことにファインマンはいらだち，それが理由で，それらの講義のノートの頒布を認めなかったのだろうと推測する．

ファインマンはずっと後に，John Wheelerの60歳の誕生日を記念した本に掲載された2つの論文の中で，彼の結果の詳しい説明を書き上げた[Feyn 72]．この序文の著者の1人(Thorne)がしつこく彼にまとわりつかなかったら，これらの論文は書かれなかっただろう．相互の合意により，Thorneはファインマンの家に，週に一回，決まった時間に電話を掛け，Wheeler記念論文集への投稿文を書くように促した．これは論文が完成するまで続いた．量子重力に戻るにあたって，ファインマンには痛みと悔恨があったことは明らかであった．

ファインマンの目標の1つは，この理論の繰り込み可能性についての論争を解決することであった．ワルシャワ会議では繰り込み可能であるかわからないと述べているが，16.2節ではよりはっきりと，「こ

の理論は繰り込み不可能なのではないかと疑う」と記している．今日ではこの表現でさえ，極端に慎重なものに聞こえる．いずれにしろ，ファインマンはいつも，繰り込み可能性を理論の判断基準にすることに積極的ではなく，16.2 節では，繰り込み不可能であることが「真に意味のある障害なのか」わからないと述べている[*5].

---

*5　(訳注)原著では，ここから序文の viii ページの「30 年以上も前に…」に続く．

【付 録B】

量子重力

ブライアン・ハットフィールド

ファインマンは，自分の「重力時代」と呼んでいた期間の終わり頃である1962-63年に，カクテクで重力についての講義をした．その当時，重力の研究を行なおうとした主な動機は，量子重力への関心だった．1980年，彼は私に，50年代，量子重力の結果は簡単に求まるだろうと考えていたと話した．実際，重力は弱い．摂動論的な量子電気力学で見事な成功を収めていた彼は，重力では1次まで計算すれば十分であると考えた．もちろん，整合的な量子論を定義するのは困難かもしれないとは予想した(たとえば重力定数の次元は，繰り込みに対する障害である)．しかし彼のアイデアは，完全で首尾一貫した量子化をし結果を導くということではなく，別の方向であった．つまり，重力子によるコンプトン散乱など具体的なプロセスに対する振幅を摂動で計算し，生じるかもしれない興味深い問題点に一つずつ取り組むということであった．「興味深い」問題点とは定義により，量子場の理論でこれまで出現しなかった重力に付随する，なじみのない新しい困難を意味する．そしてファインマンは最初，紫外発散および繰り込み可能性の問題を無視し，後になって初めてこれらの問題に戻った．結局，繰り込み可能な定式がなかったため，摂動的量子重力論を放棄することにはなった．しかしファインマンの「攻撃的方針」は，いつものように場の理論における重要な発見に結び付いた．1ループでユニタリティを維持するためには，共変ゴーストが必要であるという発見である(付録Aの議論を参照)．

この本の講義は30年以上も前に行なわれたものである．ここでは量子重力におけるファインマンの分析のいくつかを振り返り，その後に行なわれた研究の方向を見てみよう．

幾何学と量子場の理論との関係

古典論的な重力への標準的な従来の方法は，等価原理から出発し，幾何学的観点を発展させることである．ファインマンは，滅多に標準的なアプローチを取らないことを誇りにしている．研究室の黒板の隅には，「私は，自分で創造できないものは理解できない」と書かれて

いる．この文はその黒板の隅に 7 年以上も，誰にも触られないで残っていた．私が最初に見たのは 1980 年の秋だったが，1988 年の 2 月にも同じ場所に書かれていた（[Feyn 89] 参照）．だからファインマンが一般相対論を非幾何学的観点から導いたとしても，驚くにはあたらない．このアプローチの実用的利点は，重力を研究するのに，最初に（ファインマンによれば）「気紛れで感傷的な」微分幾何を学ぶ必要はなくなることである．（その代わりに，場の量子論「さえ」学べばよい．）重力の量子化を最終目標としているとき，幾何学的解釈は邪魔であるとファインマンは考えた．場の理論的な観点からは，量子幾何とかトポロジーの揺らぎとか時空の泡などの物理的意味を最初から定義する必要はなく，量子化した後で幾何学的意味を探せばよい．（たとえば，Sachs の質問とファインマンの答 [Feyn 63b] を参照．）幾何学的意味があるのは「驚くべきこと」だが，質量のないスピン 2 の場が計量として解釈できるという事実は，「何らかのゲージ不変性を表わしていると理解すべき」単なる偶然の「一致」であると，ファインマンは確かに感じていた（8.4 節）．

現在我々は，電気力学やヤン-ミルズ理論などの古典的なゲージ理論の幾何学的解釈を知っている（たとえば [Yang 77] 参照）．ベクトル・ポテンシャル A_μ^a は，構造群がゲージ群（電気力学では $U(1)$，ヤン-ミルズでは $SU(2)$，色力学では $SU(3)$）であるときの，主ファイバー束上の接続係数である．場の強度 $F_{\mu\nu}$（電気力学では電場と磁場）は，接続（ポテンシャル）に付随する曲率である．場が結合する荷電物質は，付随するベクトル・バンドルである（たとえば [DrMa 77] 参照）．したがって，幾何とゲージ不変性の関連についてのファインマンの直感は正しかったように見える．彼の経路積分の観点からは，量子電気力学（QED）や量子色力学（QCD）は主ファイバー束上の接続の空間での積分に相当する．ゲージ場の幾何学的解釈は QED や QCD の解法（つまり経路積分の計算や近似）には役立たなかったとも言えるが，これらの理論のトポロジー的側面に関する，多くの有用な考察（Gribov の不定性，インスタントン，真空の角度，トポロジー的に等価でない真空など）や，トポロジー的質量をもつ新しいヤン-ミルズ型ゲージ理論の構築に導いた．

重力子のスピンと反重力

重力理論の場の理論的展開をすることの利点の一つは，完全に首尾一貫した一般共変な理論から出発しなくとも，つまり一般共変性という原理を持ち出さなくとも，重力子の質量はゼロでスピンは 2 であることが保証できることである．これは重力理論を，幾何学的枠組みを使って上から構築するのではなく，下から構築するようなものである．講義ではこの展開は 2.3 節に始まり，3.1 節から 3.4 節へと続く．まとめると，その論理は次のようなものとなる．

点粒子の場の量子論では，2 粒子間の力は仮想粒子の交換によって媒介される．力の種類ごとに「チャージ」というものがある．チャージをもつ粒子は，力を媒介する粒子に結合する，つまりそれと相互作用することによって，力を感じる．最も有名な例が電気力学である．電磁気の力を感じる粒子は，電気的チャージ，つまり電荷をもつ．電磁気力はスピン 1 の，光子と呼ばれる粒子によって媒介される．光子自体は電荷をもたず，したがって直接互いに結合することはない．その結果，光子場の方程式は，光子場に関しては線形である．ヤン-ミルズ・ゲージ理論から構成される強い力の理論，つまりQCD では，チャージは「カラー(色)」と呼ばれる(強い力とは，陽子や中性子を結合させ原子核を作る力である)．強い力を感じる基本的な粒子は，カラーをもったクォークであり，強い力を媒介する粒子はグルオンと呼ばれる．グルオン自体もカラーをもっており，したがって光子とは異なり，互いに相互作用をする．その結果，グルオン場の方程式は非線形となる．重力に関係するチャージは質量であり，特殊相対論から，それはエネルギーと等価であると予想される．我々が知っているものにはすべてエネルギーがあるので，重力はすべての物に結合すると考えられる．重力を媒介する粒子は重力子と呼ばれる．重力子はエネルギーをもつので，重力子も互いに直接，相互作用することができる．

もしある場の理論が重力を表現しているとすれば，それは適切な，静的で非相対論的極限では，ニュートンの重力の法則を再現しなければならない．つまり，距離 r だけ離れた粒子 1 と粒子 2 の間に重力子が交換することによって働く力は，適切な極限で

$$F = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{B.1}$$

とならなければならない．よく知られているように重力は長距離力である(力は $1/r^2$ に比例し，ポテンシャルは $1/r$ に比例する)．したがって光子の場合と同様，自由な孤立した重力子の質量はゼロでなければならない．しかし電磁気力の場合と異なり，同種のチャージ(つまり質量)をもつ物の間でも，重力は引力である．

散乱ではなく静的な力を生み出すには，1 つの重力子の放出または吸収が起きるとき，それを放出または吸収した粒子の内部状態が不変でなければならない．これにより，重力子が半整数スピンをもつ可能性が排除される(たとえば，スピン 1/2 の波動関数を回転させて元に戻すには 720 度回転させなければならないという事実に関係する)．したがって重力子のスピンは整数でなければならない．次に，どの整数が可能かを判断するために，粒子 2 が粒子 1 と同一の場合と，粒子 2 が粒子 1 の反粒子である場合を考える．つまり，互いのチャージが同じ場合と逆の場合である．ポテンシャルを計算し適切な極限を考えると，電気力学でのように交換される粒子のスピンが奇数の場合は，同種のチャージは反発し異種のチャージは引き付け合う．一方，交換される粒子が整数スピンをもつ場合には，ポテンシャルは常に引力と

なる(同種のチャージも異種のチャージも引き付け合う)．したがって重力子のスピンは 0, 2, 4, … でなければならない．

次にスピン 0 の可能性を排除するために，エトベシュの実験，およびその最近の精密化に着目する．それによれば，重力は物体のエネルギーに結合し，したがって光子のようなものでも重力から影響を受け，重力場中で「落下」する．もし交換される粒子のスピンが 0 だとすると，スピン 1 の光子が重力に結合しなくなる．光が太陽などの重い物体によって曲がることはわかっているので，重力子はスピン 0 ではありえない．

場の理論の表現を使うと，粒子 1 と粒子 2 の間で交換する粒子の伝播を表わすグリーン関数は，運動量空間では

$$\Delta_0 \sim \frac{1}{k^2} \qquad \text{スカラー場}$$
$$\Delta_1 \sim \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \qquad \text{ベクトル場} \tag{B.2}$$
$$\Delta_2 \sim \frac{\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho}}{k^2} \qquad \text{テンソル場}$$

k^2 は，相互作用で交換される仮想粒子がもつ 4 元運動量の 2 乗であり，$\eta_{\mu\nu}$ は平坦なミンコフスキー時空の計量である．スカラー場はスピン 0，ベクトル場はスピン 1，そしてテンソル場の適切に射影された成分はスピン 2 を表わす．交換による振幅を計算するには，伝播関数 Δ を，二つの粒子のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}(1)$ と $T^{\alpha\beta}(2)$ ではさむ．スピン 0 の粒子の交換の場合，伝播関数 Δ_0 は分子に，$T^{\mu\nu}(1)$ と $T^{\alpha\beta}(2)$ の添字を縮約する $\eta_{\mu\nu}$ という因子をもたないので，それぞれのエネルギー運動量テンソルの 2 つの添字を内部で縮約しなければならない．つまりスピン 0 の交換の場合，振幅は

$$T^{\mu}{}_{\mu}(1)\frac{1}{k^2}T^{\alpha}{}_{\alpha}(2) \tag{B.3}$$

に比例する．つまり，スピン 0 の重力子はエネルギー運動量テンソルのトレースに結合する．しかし，ミンコフスキー時空での電磁場のエネルギー運動量テンソルのトレースはゼロなので，スカラーの重力場では，重力と光子を結合させることはできず，したがって重力子のスピンは 0 ではありえない．

スピンが 0 ではないとすれば次の可能性はスピン 2 である．スピン 2 を排除する根拠は古典的にはないので，「もしそれで済むなら，それで済まそう」という規則を適用して，より大きなスピンは無視される．つまり重力場は階数 2 のテンソル場で表わされる．しかしそれで終わりではない．一般のテンソル場は除去したい部分を含んでいる．たとえば，反対称部分はスピン 1 の場の結合のように振る舞う(電磁場 $F^{\mu\nu}$ は反対称である)ので，捨てなければならない．したがって対称テンソル場が残る．

まとめると，重力は長距離力なので重力子の質量はゼロであり，物

質のエネルギーに常に引力として結合するので，スピンは 2 である．

1. 2 節でファインマンは，一般には「反重力」と呼ばれている，重力と反物質の振る舞いに簡単に触れている．粒子と反粒子が同一ではない場合に，重力と反物質の振る舞いを直接測定する実験は 1 つだけある．W. Fairbank と F. Witteborn によって行なわれたこの実験は [WiFa 67, FWML 74]，Fairbank が出席していた 1957 年の Chapel Hill 会議での DeWitt のコメント（序文，[DeWi 57] 参照）に刺激されて行なわれたものと思われ（この問題の報告をした [NiGo 91] を参照），重力実験が直面する困難の格好の例である．1. 2 節でファインマンは，それぞれ K 中間子 [Good 61] と QED の真空分極 [Schi 58, 59] に基づく，反重力を否定する 2 つの議論を提示している．もしファインマンがここでの講義で目指した，重力を摂動論的に量子化するプログラムが首尾一貫した理論を生み出していたとすれば，問題は解決して反重力は考慮されなかっただろう．量子重力の摂動はミンコフスキー時空から出発するので，すべての次数で CPT 理論が成り立ち，また粒子と反粒子は同じ質量をもつと期待される．さらに，前述の重力子の性質は変わらないので，反物質を含め重力は常に引力となる．

残念ながら摂動論はうまくいかず，首尾一貫した量子重力を求めて多くの労力が費やされた．量子重力の低エネルギー，長距離そして弱場の極限は一般相対論になると期待されるが [Wein 64a, 64b]，整合性を得るには自然は，非常に短距離で物質と反物質の重力の違いを必要としているのかもしれない．そのような効果の大きさは現在の実験の限界以下であり，反重力を否定する論理を回避できるかもしれないが，もちろん，何かが「上に向かって落ちる」ことを意味するのではない．

ゲージ不変性と等価原理

重力理論の場の理論的展開のもう一つの利点は，相対論の基礎である等価原理に，ゲージ不変性の結果として到達できることである．下から重力理論を構築するとき，このゲージ不変性は，いつのまにか入ってくるように見える．

自由な重力子は質量がなく光速度で動く．つまり重力子が静止する座標系はない．したがって運動方向のスピン，その反対方向のスピンという概念が不変になる．つまり質量のない重力子には 2 種類の偏極つまりヘリシティがあり，それ以上はない．一般には，対称テンソルは 2 つ以上の力学的自由度をもつ．したがって，2 つの力学的自由度しかもたない階数 2 の場は「テンソルではなく」，ローレンツ不変性を損なう危険がある．この状況は電気力学に似ている．この矛盾を逃れる方法は，ゲージ対称性を組み入れることである．つまり，自由な質量のないスピン 2 の重力子を表わすミンコフスキー時空での作用を作るときには，力学的自由度を 2 にまで減らすゲージ対称性が必要で

ある．そうしなければ，量子論はローレンツ不変にはならない．必要なゲージ対称性をもち，場の微分は 2 階までの作用は Fierz-Pauli 作用 [FiPa 39] である．出発点にはこれで十分であり，一般相対論に向けて進んでいける(付録 A の要約を参照)．最終的には，ゲージ不変性の結果として等価原理に到達する．ゲージ対称性は，自由な質量のないスピン 2 の重力子の量子論がローレンツ不変になるために，最初から登場するのである．

無限大との戦い

重力と量子力学を組み合わせるのが困難な問題であることは，よく知られている．場が量子化されると，場の各モードは零点エネルギーをもつ．場は無限個のモードをもっているので，量子場の真空エネルギーは無限大になる．この無限大は，場の演算子を正規順序に並べておけば捨て去ることができる．そうすることが正当化されるのは，それが，もともと任意であるエネルギーの原点の再定義に過ぎないからである．しかし重力はすべてのエネルギーに結合するので，重力を考えるときは，この無限大の真空エネルギーを捨て去ることはできない．量子場の真空の揺らぎは，現実の物理的効果を生み出す．仮にモードの数を有限個に限定できたとしても，そのモードの零点エネルギーによる真空のエネルギー密度は，かなり大きい値になりうる．そのような真空のエネルギー密度は，重力理論には宇宙定数として登場する．そして現実の宇宙定数は極めて小さいので，ここに大きな問題が発生する [Wein 89]．

次に，重力の結合定数は，$\hbar=c=1$ となる単位系では，(エネルギー)$^{-2}$ の次元をもつ．結合定数が正の次元をもつ理論はしばしば有限な理論となり，また無次元の理論は繰り込み可能になる可能性がある．そして，結合定数が負の次元をもつ理論は通常，あらゆるところに発散が出現し，その発散を吸収するには無限個のパラメーターが必要となる．つまり繰り込み可能ではない．量子化された一般相対論はこの範疇に入る．

繰り込みの手法では，摂動展開の各項に現われる高エネルギー発散(紫外発散)を消すため，相殺項を導入する．繰り込みが成功する場合，すべての量子効果を含んだ古典場の理論とみなすことができる有効作用は，相殺項によって有限になる(たとえば [Hatf 92] 参照)．相殺項の形は，最初の作用の対称性と合致する．つまり内部対称性により相殺項の種類が厳しく限定され，対応する発散の数を制限する．つまり，多くの対称性をもつ理論は一般に有限になりやすい．

摂動的量子重力では，知られている対称性と合致する相殺項の種類はたくさんある．たとえば $R^2, R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, R^3$ などである．ゴースト場の必要性が発見され，摂動を任意のオーダーまで計算するための規則がわかると([DeWi 67a, 67b], [FaPo 67])，場の量子論のマーフィーの

法則(「相殺項を排除する対称性がなければ発散が現われる」)が適用されることが明らかになり，この理論は繰り込み不可能である可能性が強くなった．1ループ・レベル(最初の量子補正)で，純量子重力(物質のない量子重力)が有限であることが示されたとき［tHVe 74］［Kore 74］，かすかな希望た生じた．ラグランジュ密度に対する相殺項は

$$\mathcal{L}^{(1)} = \sqrt{g}\left[\frac{1}{120}R^2+\frac{7}{20}R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right] \tag{B. 4}$$

である．純重力の場合，古典論レベルではこれらの相殺項は消える．$R=0$ かつ $R_{\mu\nu}=0$ だからである．しかし1ループの純量子重力が有限なのはそのためではない．実粒子に対して有限なのは，1ループでは計量の再定義によって $\mathcal{L}^{(1)}$ を吸収できるので，その効果は物理的に観測可能ではないからである．純重力においては

$$\frac{\delta\mathcal{L}^{(0)}}{\delta g_{\mu\nu}} = R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \tag{B. 5}$$

であり，最小作用の原理によって，純重力の古典場の方程式が導かれる．もし計量を

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}+\epsilon\delta g_{\mu\nu}, \qquad \delta g_{\mu\nu} \propto \frac{7}{20}R_{\mu\nu}-\frac{11}{60}Rg_{\mu\nu} \tag{B. 6}$$

というように再定義すると，$\mathcal{O}(\epsilon^2)$ を2ループ・プロセスとして

$$\mathcal{L}^{(0)}(g)+\mathcal{L}^{(1)}(g) = \mathcal{L}^{(0)}(g')+\mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{B. 7}$$

であり，1ループは有限となる．物質場が重力に結合するときは，1ループはもはや，古典論レベルでも有限ではない．

1ループを有限にした何らかの隠された対称性があり，その対称性のため，純重力理論は有限になるかもしれないという期待もあった．しかしこの期待に反し，コンピューターによる2ループ補正の計算結果は発散を含んでいた［GoSa 86］．紫外発散の最近の報告としては，［Wein 79］や［Alva 89］を参照．

紫外での振る舞いを改善する1つの方法は，より大きな対称性を理論に組み入れることである．したがって，量子論での振る舞いを改善するために行なわれる一般相対論の拡張または修正は，通常，対称性の追加に基づくものである．人気のあるアプローチの1つは「超重力」と呼ばれるものである.(たとえば［vanN 81］参照.）これは「超対称性」という，ボゾン場とフェルミオン場の間の対称性に基づく．超対称性をゲージ化して局所的なものにすると(時空の各点で異なる超対称変換を行なうことができるようにすると)，そのゲージ対称性は必然的に一般共変性を含み，したがって重力が導かれる．簡単に言うと，各ボゾン場に対して，その超対称パートナーであるフェルミオン場がある．そしてボゾン場のループによる通常の発散がしばしば，超対称パートナーであるフェルミオン場のループによる発散と相殺するため，量子論の紫外領域での振る舞いが改善される．超対称性により，出現する相殺項の種類が厳しく限定されると言ってもよい．残念ながら，

時空の次元が4のときは相殺項が出現する可能性がある(最善な場合は7ループ以上で). 誰にもはっきりとは言えないことだが, 理論を有限にするには何らかの追加の, または隠された対称性, あるいはマジックが必要だと思われる.

現在, 最も有望な量子重力の候補は弦理論である. 弦理論(ストリング理論)とは, 基本的構成要素が(通常の場の量子論での点粒子ではなく)1次元的に拡がった物であるような量子論である. 弦理論を, すべての基本的力を統一する理論(「theory of everything」)として使うときの基本的アイデアは, すべての物質はプランク長程度の大きさの微小な弦から構成されるということである. 通常のエネルギー・スケールでは, そのような弦の大きさを見ることはできず, 点と区別できない. すべての粒子が一種類の弦から構成される, つまり同種の弦の異なる種類の励起状態に過ぎないので, 統一が達成される. 弦のある振動モードは, 質量のないスピン2の状態であり, 重力子とみなすことができる. つまり弦理論は必然的に量子重力を含んでいる. 数学的に首尾一貫している(つまり量子異常がない)摂動展開が存在し, 各次数で摂動項は有限らしいという発見によって, 弦理論に対する関心が高まった.

弦理論の紫外領域での振る舞いが改善される直観的理由は, 弦理論が巨大な対称性(モジュラー不変性)をもつことである. 弱い相互作用の4体フェルミ理論の紫外領域の振る舞いが, その4体頂点関数を重いゲージ粒子 $W^{\pm}$ および Z^0 の交換で置き換えることによって改善されたように, 弦理論では, 短距離での点粒子の重力を弦の重い状態の交換によって修正する. 昔のフェルミ理論の結合定数のエネルギー次元はマイナスであり, したがってこの理論は繰り込み不可能だった. 電弱ゲージ理論はこの定数をゲージ粒子交換に付随する無次元の結合定数と置き換え, 繰り込み可能にした. 弦理論も新しい結合定数, 弦の張力 T を導入する. これは通常の単位では長さの逆二乗であり, $L=\sqrt{c\hbar/\pi T}$ が長さの次元をもつ. 重力定数 G, $\hbar$, および光速度 c から構成できる唯一の長さは, プランク長さ $L_{\mathrm{P}}=\sqrt{G\hbar/c^3}$ である. 光速度と弦の張力を無次元にするのが弦理論での自然な単位なので, $c=1$ および $T=1/\pi$ とする. この単位系では, 上記の L と L_{P} から $\hbar$ を消去すると, 重力定数が無次元になる($G=(L_{\mathrm{P}}/L)^2$)ことがわかる.

点粒子の場合と異なる弦理論の奇妙な特徴は, 時空の次元数が理論自体の内在的性質ではなく, 理論のそれぞれの解の性質になることである. いわゆる臨界次元 D_c(=10) 以下の時空次元に対して, $N=1$ の世界面超対称性をもつ異常項がない解を見つけることができる.

残念ながら, 摂動級数の各項は有限だが, 級数の和は発散する [GrPe 88]. また弦理論自体はおそらく一意的だろうが, 理論の解はそうではない. 特定の解, つまり真の真空を選びだす摂動的な機構はない. この意味で, 弦理論の摂動論は予言能力をもたない. 同様に, この世界は通常のエネルギーでは超対称ではない. 低エネルギーで超

対称ではない質量スペクトラムをもつような解を選びだす摂動的な機構もない．

非摂動的重力

現在，量子重力の首尾一貫した，有限な摂動論的定式化はない．一般に摂動展開を定義する際には，摂動の出発点となる時空の計量を選択しなければならない．量子重力の非摂動的定式化では，時空のすべての側面が理論の解から決定されなければならない．たとえば弦理論では，時空内の弦の伝播が時空の計量を決めると思われる．したがって時空の計量は，理論の定式化の中には登場しないことが望ましい．そのため，そして前述の困難を回避するため，弦理論の非摂動的定式化の探求が進められている．

摂動的な量子重力の展望がないので，一般相対論に基づく非摂動的量子重力論の可能性に対する関心が，再び高まっている．困難は，摂動的定式化をしたために引き起こされたのかもしれないからである．Wheeler-DeWitt 方程式と正準変数を使った一般相対論への正準的アプローチは，解くべき方程式が複雑なために進んでいない．しかし最近，新しい変数による一般相対論の再定式化がなされ [Asht 86, 87]，量子重力の新しいループ表現が導かれた [JaSm 88] [RoSm 88]．この方程式はずっと解きやすく，いくつかの進展が見られた．この新変数はまた今後利用できるかもしれない，一般相対論とヤン-ミルズ理論との間の関係も明らかにした．

最後の注釈——ファインマンと添字

ファインマンはかつて，マイナスの符号，i，2 あるいは π といった因子を正しく求めるのは，結果を発表するときになってすればよいことだと言った．添字の付け方や記法も同じ範疇に入るようである．最初の 6 章では，ほとんど「すべて」の添字が「下付き」であった（[Feyn 63b] も参照）．これは，普通でない記法 $x_\mu=(t,x,y,z)$ と $x^\mu=(t,-x,-y,-z)$ を意味する．時空が平坦でないときは，添字の規則は無視できない．通常の規則が適用できるように添字を調整し，ミンコフスキー計量にはほぼ標準的な $\eta_{\mu\nu}$ を使った（ファインマンは $\delta_{\mu\nu}$ を使っていた）．

パサデナでファインマンは，側面と後部にファインマン図が描かれた車のバンをもっていた．そのバンは [Syke 94] に描かれている．1981 年にカルテクの Beckman 会館の駐車場で最初にそのバンを見たとき，私はそのバンがファインマンのものだとは知らなかった．しかし数秒でこれがファインマンのものであることを理解した．第一に，ナンバー・プレートは QUANTUM（量子）ではなく，QANTUM とスペルが間違っていたし，第二に，後部の図の記号の添字がすべて下に

書かれていたからである．ファインマンは，QED はナンバーとしてすでに使われていたし，QUANTUM では長過ぎると言っていた．（しかし私はファインマンが，ゲージ(gauge)をしばしば guage と綴っていたのを知っている．）バンの図では，光子の伝播関数に $\eta_{\mu\nu}$ が付いていなかったので，通常の記法に従えば，その両側の頂点のガンマ行列の添字は，片方は下付き，他方は上付きでなければならない．バンの窓から中を覗いたら後部に乾草の俵があったので，ファインマンの車であるという私の判断の正しさが確認された．

参考文献

[Alva 89] Alvarez, Enrique (1989). "Quantum gravity: an introduction to some recent results," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 561-604.

[Asht 86] Ashtekar, A. (1986). "New variables for classical and quantum gravity," *Physical Review Letters*, **57**, 2244-2247.

[Asht 87] Ashtekar, A. (1987). "A new Hamiltonian formulation of general relativity," *Physical Review D*, **36**, 1587-1603.

[Baad 52] Baade, Walter (1952). "Report of the Commission on Extragalactic Nebulae," *Transactions of the International Astronomical Union*, **8**, 397-399.

[Bard 65] Bardeen, James M. (1965). "Stability and dynamics of spherically symmetric masses in general relativity," unpublished Ph. D. thesis, California Institute of Technology.

[BBIP 91] Balbinot, Roberto, Brady, Patric R., Israel, Werner, and Poisson, Eric (1991). "How singular are black-hole interiors?" *Physics Letters A*, **161**, 223-226.

[Birk 43] Birkhoff, G. (1943). "Matter, electricity, and gravitation in flat space-time," *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.*, **29**, 231-239.

[BTM 66] Bardeen, James M., Thorne, Kip S., and Meltzer, David W. (1966). "A catalog of methods for studying the normal modes of radial pulsation of general relativistic stellar models," *Astrophysical Journal*, **145**, 505-513.

[Bond 57] Bondi, Hermann, "Plane gravitational waves in general relativity," *Nature*, **179**, 1072-1073.

[BoDe 75] Boulware, David G. and Deser, Stanley (1975). "Classical general relativity derived from quantum gravity," *Annals of Physics*, **89**, 193-240.

[Cart 28] Cartan, Elie (1928). *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Memorial des Sciences Mathématiques, Fascicule IX (Gauthier-Villars, Paris, France).

[Chan 64] Chandrasekhar, S. (1964). "Dynamical instability of gaseous masses approaching the Schwarzschild limit in general relativity," *Physical Review Letters*, **12**, 114-116.

[ChHa 82] Chandrasekhar, S. and Hartle, James B. (1982). "On crossing the Cauchy horizon of a Reissner-Nordström black hole," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **384**, 301-315.

[Cock 65] Cocke, W. John (1965). "A maximum entropy principle in general relativity and the stability of fluid spheres," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **A 2**, 283-306.

[Dese 70] Deser, Stanley (1970). "Self-interaction and gauge invariance," *General Relativity and Gravitation*, **1**, 9-18.

[Dese 87] Deser, Stanley (1987). "Gravity from self-interaction in a curved background," *Classical and Quantum Gravity*, **4**, L99-L105.

[DeWi 57] DeWitt, Cecile M. (1957). *Conference on the Role of Gravitation in Physics* at the University of North Carolina, Chapel Hill, March 1957; WADC Technical Report 57-216 (Wright Air Development Center, Air Research and Development Command, United States Air Force, Wright Patterson Air Force Base, Ohio).

[DeWi 67a] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, II," *Physical Review*, **162**, 1195-1239.

[DeWi 67b] DeWitt, Bryce S. (1967). "Quantum theory of gravity, III," *Physical Review*, **162**, 1239-1256.

[DeWi 94] DeWitt, Bryce S. (1994). Private communication.

[Dira 37] Dirac, P. A. M. (1937). "The cosmological constants," *Nature*, **139**, 323.

[Dira 38] Dirac, P. A. M. (1938). "New basis for cosmology," *Proc. R. Soc. London A*, **165**, 199-208.

[DrMa 77] Drechsler, W. and Mayer, M. E. (1977). *Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories* (Lecture Notes in Physics, Volume 67, Springer-Verlag, New York).

[Eddi 31] Eddington, A. (1931). "Preliminary note on the masses of the electron, the proton, and the universe," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **27**, 15-19.

[Eddi 36] Eddington, A. (1936). *Relativity Theory of Protons and Electrons* (Cambridge University Press, Cambridge).

[Eddi 46] Eddington, A. (1946). *Fundamental Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).

[Eins 39] Einstein, Albert (1939). "On a stationary system with spherical symmetry consisting of

many gravitating masses," *Annals of Mathematics*, **40**, 922-936.

[FaPo 67] Faddeev, L. D. and Popov, V. N. (1967). "Feynman diagrams for the Yang-Mills Field," *Physics Letters B*, **25**, 29-30.

[Feyn 57] Feynman, Richard P. (1957). "Conference on the Role of Gravitation in Physics, an expanded version of the remarks by R. P. Feynman on the reality of gravitational waves, mentioned briefly on page 143 of the Report [DeWi 57]," typescript in Box 91, File 2 of The Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.

[Feyn 61] Feynman, Richard P. (1961). Unpublished letter to Victor F. Weisskopf, January 4-February 11, 1961; in Box 3, File 8 of The Papers of Richard P. Feynman, the Archives, California Institute of Technology.

[Feyn 63a] Feynman, Richard P., Leighton, Robert B., and Sands, Matthew (1963). *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts). (邦訳)ファインマン物理学(全5巻), 岩波書店.

[Feyn 63b] Feynman, Richard P. (1963). "Quantum theory of gravitation," *Acta Physica Polonica*, **24**, 697-722.

[Feyn 67] Feynman, Richard P. (1967). *The Character of Physical Law* (M. I. T., Cambridge). (邦訳)物理法則はいかにして発見されたか, ダイヤモンド社.

[Feyn 72] Feynman, Richard P. (1972). "Closed loop and tree diagrams" and "Problems in quantizing the gravitational field, and the massless Yang-Mills field," in *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, edited by John R. Klauder (W. H. Freeman, San Francisco), pp. 355-408.

[Feyn 85] Feynman, Richard P., as told to Leighton, Ralph (1985). *Surely You're Joking, Mr. Feynman!* (W. W. Norton, New York). (邦訳)ご冗談でしょう, ファインマンさん, 岩波書店.

[Feyn 88] Feynman, Richard P., as told to Leighton, Ralph (1988). *What Do You Care What Other People Think?* (W. W. Norton, New York). (邦訳)困ります, ファインマンさん, 岩波書店.

[Feyn 89] "Feynman's office: The last blackboards," *Physics Today*, **42** (2), 88 (1989).

[FiPa 39] Fierz, M. and Pauli, W. (1939). "Relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," *Proceedings of the Royal Society of London A*, **173**, 211-232.

[Fink 58] Finkelstein, David (1958). "Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle," *Physical Review*, **110**, 965-967.

[Fowl 64] Fowler, William A. (1964). "Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation," *Reviews of Modern Physics*, **36**, 545-555.

[FuWh 62] Fuller, Robert W. and Wheeler, John A. (1962). "Causality and multiply connected space-time," *Physical Review*, **128**, 919-929.

[FWML 74] Fairbank, W., Witteborn, F., Madey, J., and Lockhart, J. (1974). "Experiments to determine the force of gravity on single electrons and positrons," *Experimental Gravitation: Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi,"* Course LVI, B. Bertotti, ed. (Academic Press, New York), 310-330.

[Gell 89] Gell-Mann, Murray (1989). "Dick Feynman—The guy in the office down the hall," *Physics Today*, **42** (2), 50-54.

[Good 61] Good, M. L. (1961). "K_2^0 and the equivalence principle," *Physical Review*, **121**, 311-313.

[GoSa 86] Goroff, M. and Sagnotti, A. (1986). *Nuclear Physics B*, **266**, 709.

[GrBr 60] Graves, John C. and Brill, Dieter R. (1960). "Oscillatory character of Reissner-Nordström metric for an ideal charged wormhole," *Physical Review*, **120**, 1507-1513.

[GSW 87] Green, M., Schwarz, J., and Witten, E. (1987). *Superstring theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England).

[GrPe 88] Gross, D. and Periwal, V. (1988). "String perturbation theory diverges," *Physical Review Letters*, **60**, 2105-2108.

[Gupt 54] Gupta, Suraj N. (1954). "Gravitation and electromagnetism," *Physical Review*, **96**, 1683-1685.

[Guth 81] Guth, Alan H. (1981). "Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems," *Physical Review D*, **23**, 347-356.

[HaEl 73] Hawking, Stephen W. and Ellis, George F. W. (1973). *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, England).

[Hatf 92] Hatfield, B. (1992). *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* (Addison-Wesley, Reading, MA).

[Hilb 15] Hilbert, D. (1915). "Die Grundlagen der Physik," *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachhr.*

Math.-Phys. Kl., 395-407.
[HoFo 63] Hoyle, Fred, and Fowler, William A. (1963). "On the nature of strong radio sources," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **125**, 169-176.
[Hoyl 48] Hoyle, Fred (1948). "A new model for the expanding universe," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **108**, 372-382.
[HWWh 58] Harrison, B. Kent, Wakano, Masami, and Wheeler, John A. (1958). "Matter-energy at high density ; endpoint of thermonuclear evolution," in Onzième Conseil de Physique Solvay, *La Structure et l'Evolution de l'Univers* (Editions R. Stoops, Brussels), pp. 124-148.
[Iben 63] Iben, Icko, Jr. (1963). "Massive stars in quasistatic equilibrium," *Astrophysical Journal*, **138**, 1090-1096.
[JaSm 88] Jacobson, T. and Smolin, L. (1988). "Nonperturbative quantum geometries," *Nuclear Physics B*, **299**, 295-345.
[JeDG 53] Jennison, R. C. and Das Gupta, M. K. (1953). "Fine structure of the extra-terrestrial radio source Cygnus 1," *Nature*, **172**, 996-997.
[Klei 89] Kleinert, H. (1989). "Quantum mechanics and path integrals in spaces with curvature and torsion," *Modern Physics Letters A*, **4**, 2329-2337.
[Kore 74] Korepin, Vladimir (1974). Unpublished Diplom thesis, Leningrad State University.
[Krai 47] Kraichnan, Robert H. (1947). "Quantum theory of the linear gravitational field," unpublished B. S. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
[Krai 55] Kraichnan, Robert H. (1955). "Special relativistic derivation of generally covariant gravitation theory," *Physical Review*, **98**, 1118-1122.
[Krai 56] Kraichnan, Robert H. (1956). "Possibility of unequal gravitational and inertial masses," *Physical Review*, **101**, 482-488.
[Krus 60] Kruskal, Martin (1960). "Maximal extension of the Schwarzschild metric," *Physical Review*, **119**, 1743-1745.
[LaLi 51] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1951). *The Classical Theory of Fields*, translated by M. Hammermesh (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts). (邦訳)場の量子論, 東京図書.
[LiBr 90] Lightman, Alan and Brawer, Roberta (1990). *Origins : The Lives and Worlds of Modern Cosmologists* (Harvard University Press, Cambridge).
[MaWh 66] May, Michael M. and White, Richard H. (1966). "Hydrodynamic calculations of general relativistic collapse," *Physical Review*, **141**, 1232-1241.
[Mich 63] Michael, F. Curtis (1963). "Collapse of massive stars," *Astrophysical Journal*, **138**, 1097-1103.
[Miln 34] Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 64 ; McCrea, W. and Milne, E. (1934). *Quart. J. Math (Oxford)*, **5**, 73.
[MiWh 57] Misner, Charles W. and Wheeler, John A. (1957). "Classical physics as geometry : gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space," *Annals of Physics*, **2**, 525-603, reprinted in [Whee 62].
[MTW 73] Misner, Charles W., Thorne, Kip S., and Wheeler, John A. (1973). *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco).
[NiGo 91] Nieto, M. and Goldman, T. (1991). "The arguments against "antigravity" and the gravitational acceleration of antimatter," *Physics Reports*, **205**, 221-281.
[OpSn 39] Oppenheimer, J. Robert and Snyder, Hartland (1939). *Physical Review*, **56**, 455-459.
[Penr 65] Penrose, Roger (1965). "Gravitational collapse and space-time singularities," *Physical Review Letters*, **14**, 57-59.
[Podu 64] Podurets, Mikhail A. (1964). "The collapse of a star with back pressure taken into account," *Doklady Akademi Nauk*, **154**, 300-301 ; English translation, *Soviet Physics—Doklady*, **9**, 1-2.
[RoSm 88] Rovelli, C. and Smolin, L. (1988). "Loop representation for quantum general relativity," *Nuclear Physics B*, **331**, 80-152.
[Schi 58] Schiff, L. (1958). "Sign of the gravitational mass of the positron," *Physical Review Letters*, **1**, 254-255.
[Schi 59] Schiff, L. (1959). "Gravitational properties of antimatter," *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **45**, 69-80.
[Schm 63] Schmidt, Maarten A. (1963). "3C 273 : A star-like object with large red-shift," *Nature*, **197**, 1040.
[Schu 85] Schutz, Bernard F. (1985). *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge).
[Schw 16] Schwarzschild, Karl (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der

Einsteinschen Theorie," *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik*, **1916**, 189-196.

[Syke 94] Sykes, Christopher (1994). *No ordinary genius: the illustrated Richard Feynman* (W. W. Norton, New York).

[Thir 18] Thirring, H. (1918). "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 33-39; Thirring, H. and Lense, J. (1918). "Über den Einflußder Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie," *Phys. Z.*, **19**, 156-163; Thirring, H. (1921). "Berichtigung zu meiner Arbeit: 'Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie'," *Phys. A.*, **22**, 29-30.

[tHVe 74] 't Hooft, G. and Veltman, M. (1974). *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **20**, 69.

[Thor 94] Thorne, Kip S. (1994). *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (W. W. Norton, New York).

[Toop 66] Tooper, Robert F. (1966). "The 'standard model' for massive stars in general relativity," *Astrophysical Journal*, **143**, 465-482.

[vanN 81] van Nieuwenhuizen, Peter (1981). "Supergravity," *Physics Reports*, **68**, 189-398.

[Vebl 27] Veblen, O. (1927). *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Cambridge Tracts in Math and Math Phys., Cambridge University Press, London).

[Wald 84] Wald, Robert M. (1984). *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago).

[Wald 86] Wald, Robert M. (1986). "Spin-two fields and general covariance," *Physical Review*, **D33**, 3613-3625.

[Wein 64a] Weinberg, Steven (1964). "Derivation of gauge invariance and the equivalence principle from Lorentz invariance of the S-matrix," *Physics Letters*, **9**, 357-359.

[Wein 64b] Weinberg, Steven (1964). "Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass," *Physical Review*, **135**, B1049-B1056.

[Wein 72] Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York).

[Wein 79] Weinberg, Steven (1979). "Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation," in *General Relativity: An Einstein Centenary Volume*, edited by S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, England), pp. 790-831.

[Wein 89] Weinberg, Steven (1989). "The cosmological constant problem," *Reviews of Modern Physics*, **61**, 1-22.

[Went 49] Wentzel, G. (1949). *Quantum Theory of Fields* (Interscience, New York).

[Whee 62] Wheeler, John A. (1962). *Geometrodynamics* (Academic Press, New York).

[Whee 90] Wheeler, John A. (1990). *A Journey into Gravity and Space-time* (Scientific American Library, W. H. Freeman, New York).

[WhFe 45] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1945). "Interaction with the absorber as the mechanism of radiation," *Reviews of Modern Physics*, **17**, 157-181.

[WhFe 49] Wheeler, John A. and Feynman, Richard P. (1949). "Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action," *Reviews of Modern Physics*, **21**, 425-433.

[WiFa 67] Witteborn, F. and Fairbank, W. (1967). "Experimental comparison of the gravitational force on freely falling electrons and metallic electrons," *Physical Review Letters*, **19**, 1049-1052.

[Yang 77] Yang, C. N. (1977). *Ann. New York Acad. Sci.*, **294**, 86.

訳者あとがき

このファインマン講義の時期，そして講義ノート出版の経緯については，プレスキルとソーンによる序文で説明されている．また，内容についてのコメント，さらに講義が行なわれた時点以降の学問的発展については，2つの付録に詳しく解説されている．

第3章なかばまでが一般的なお話，そしてそこから，幾何学的概念を使わない重力理論の構築が始まる．第7章からは，通常のアインシュタイン的発想との関連も説明される．第11章以降は，天体や宇宙論の問題に移る．実際の講義では第17章以降に，いわゆるゴースト場の発想が(世界で初めて)導入されたそうだが，ファインマン自身が納得できる形にまで整備されておらず，この本には含まれていない．

序文や付録にも書かれているように，現時点で見たときにこの本の内容には限界もあることは間違いないが，ファインマンがどのように研究を進めたのかが生に記されているので，通常の教科書とはまったく違った興奮が伝わってくる．さまざまな方面から物理的考察をしようとする態度が示されている．

また，それらとは別に興味深いのは，ファインマンの物理に対する姿勢を示すコメントが，あちこちに出現することである．量子力学(第1章)，統計力学(第2章)，ニュートン力学(第7章)についての一般的コメントがある．また，たとえば第11章には，「私はいつも単純な結果は単純な方法で導けると考える」と言って，面倒な方程式から得られた結果の直観的な説明に向かう部分がある．読者には，このようなことを楽しみながら，この本を読んでいただければと思う．

訳文の質についてはご不満も多いだろうが，これでご容赦いただきたい．またスペースがあったので，読者の役に立つかもしれないと考えた訳注をいくつか付けた(■印)．余計なことをと思われる方もおられるかもしれないが，これについてもお目こぼしをいただければと願っている．

1999年6月

和 田 純 夫

索　引

ファインマン，モリニーゴ，ワーグナー
ファインマン講義 重力の理論　ハットフィールド 編

1999年7月23日　第1刷発行

訳 者　和田純夫（わだすみお）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電 話　案内 03-5210-4000

印刷・製本 法令印刷　カバー 半七印刷

ISBN4-00-005942-4　Printed in Japan